

Dominik and Tielens (1996, 1997) における滑りに対する相互作用力 (摩擦)

平成 20 年 2 月 12 日 和田 浩二

目次

1	はじめに	2
2	原子スケールの素過程による摩擦	3
2.1	物質表面の原子間相互作用による滑り摩擦	3
2.1.1	Independent Oscillator モデル	3
2.1.2	A が作るポテンシャル	5
2.1.3	B の他の原子からの作用が作るポテンシャル	6
2.1.4	注目 B 原子の全ポテンシャル	6
2.1.5	z 方向の釣り合いを考慮した全ポテンシャル	6
2.1.6	\hat{x}_0 に対する \hat{x} の釣り合いの位置、バネの力	7
2.1.7	エネルギー散逸とパラメーターについての議論	15
2.1.8	無次元量 $\hat{f}_{z,crit}$, $\hat{f}_{x,max}$, $\hat{f}_{x,fric}$ の表式	16
2.1.9	ε の表面エネルギー γ による表現	17
2.1.10	c_h の弾性定数を用いた表現	18
2.1.11	接触面にかかる圧力 p と摩擦力 q の関係式	19
2.2	原子スケールの Surface Roughness による滑り摩擦	19
2.3	JKR 理論による球接触面の圧力分布	21
2.4	滑り摩擦	21
2.4.1	Maximum force in the independent oscillator model	22
2.4.2	Average friction force for non-matching grids in the independent oscillator model	22
2.4.3	Friction force due to grid steps on surfaces	22
2.5	捩れに対する抵抗モーメント	23
2.5.1	Maximum torque for aligned identical grids twist	23
2.5.2	Average torque for unaligned grids twist	23
2.5.3	Torque due to surface steps	23
2.6	摩擦力と法線方向引張力との比較	24
2.7	接線衝突の際の滑り運動の可能性	29
3	滑り面が十分固着している時の弾性論的接線方向作用力	31
3.1	半無限体表面での Point tangential traction	31
3.2	円領域面に一方向接線変位を引き起こす接線方向作用力	32
3.3	捩れを引き起こすモーメント	35
4	Dominik and Tielens (1997) における「滑り」と「捩れ」の扱い	39
5	補遺：計算ノート	41

1 はじめに

Dominik and Tielens (1996) で導出され、Dominik and Tielens (1997) での議論および数値計算に使用されている、滑りに対する抵抗力 (sliding resistance = friction, 摩擦力) についてまとめる。このことから、接触している球同士の滑り摩擦力と捩れ (twist) に対する抵抗モーメントを導出する。

一般の弾性体における摩擦には、様々なエネルギー散逸の素過程¹が含まれるが、大抵の場合には現象論的に摩擦力を表現する：

$$Q_x^{\text{slide}} = \mu F + \mu_0 \quad (1.1)$$

ここで Q_x^{slide} は面の接線方向摩擦力、 F は面の法線方向力 (垂直荷重)、 μ は摩擦係数 (coefficient of friction)、 μ_0 は、固着力 (cohesion, adhesion)。これは少数の接触点で接するような粗いマクロな表面において有効である。

しかし、ここでは、(サブ)ミクロンサイズの球が接触している状況を考え、現象論ではなく原子スケールの素過程から議論して摩擦力の表式を導出する (第2節)。

(サブ)ミクロンサイズの球同士の接触では、接触面半径は高々数百原子径程度と非常に小さいため (図1の a_0 の値参照)、1) 表面の凸凹 (asperity) はあまり効かない、2) 原子レベルの素過程 (分子間力) が効く、3) 表面

の付着力 (adhesive force) は固体中の結合力 (binding force) より小さいため塑性変形や磨耗は起こさない、4) hydrodynamic friction (粘性力?) も効かない。そこで、本論 (Dominik and Tielens 1996) では、「Simple potential for the interaction of two atoms」を考えてモデル化し、さらに弾性的性質を用いて表現することを目指す。

結果的には、上の現象論的表式に近いものが得られ、その摩擦係数 μ や固着力 μ_0 が物性値を用いて与えられる。

一方、Dominik and Tielens (1997) では、静止摩擦の表現を Johnson (1987) の弾性論によって与えている。この弾性論においては、付着力が十分強く接触面が滑っていない状態において生じる接線方向弾性力が求められる。第3節では、この導出を Johnson (1987) に基づいて行う。

TYPICAL COLLISIONAL PARAMETERS^a

Material	a_0 (Å)	δ_c (Å)	F_c (dyn)	$F_c \delta_c$ (eV)
Quartz	20	0.3	2.4 (-3)	4.5
Polystyrene	40	1.1	1.1 (-3)	7.6
Graphite	50	1.7	7.1 (-3)	75
Iron	65	2.9	2.8 (-1)	5100
Ice	100	6.9	3.5 (-2)	1500

^a Evaluated for the collision of two equal 1000 Å grains.

図1: Chokshi et al.(1995) より

MATERIAL PARAMETERS

Material	γ^a (ergs cm ⁻²)	\mathcal{E} (dyn cm ⁻²)	G (dyn cm ⁻²)	ν	ρ (g cm ⁻³)	σ (Å)	b (Å)	References
Quartz	25 ^b	5.4(11)	2.3(11)	0.17	2.6	3.44	1.84	1, 2, 3
Polystyrene	12	3.4(10)	2.1(11)	0.5	1.04	3.00	2.00	2, 4
Graphite	75	1.0(11)	3.8(10)	0.32	2.2	3.40	1.54	3, 5, 6
Iron	3000	2.1(12)	8.3(11)	0.27	7.7	2.24	2.24	2, 3, 7
Ice	370 ^c	7.0(10)	2.8(10)	0.25	1.0	3.36	3.36	2, 3

^a Surface energy per surface.

^b Measured for micron-sized particles.

^c Estimated from H-bonding.

REFERENCES.—(1) Kendall, Alford, & Birchall 1987; (2) Physics Vademecum (Anderson 1981); (3) Israelachvili 1992; (4) Kendall & Padgett 1987; (5) Brocklehurst 1977; (6) Zisman 1963; (7) Easterling & Thölen 1972.

¹ Hydrodynamic friction in lubricants (滑剤), Wear-less energy losses on atomic levels, Plastic deformation of the surfaces during sliding, Material wear (磨耗),...

2 原子スケールの素過程による摩擦

ここでは、2つの接触している物質を考え、物質表面を滑る原子の運動に作用する力を議論する。

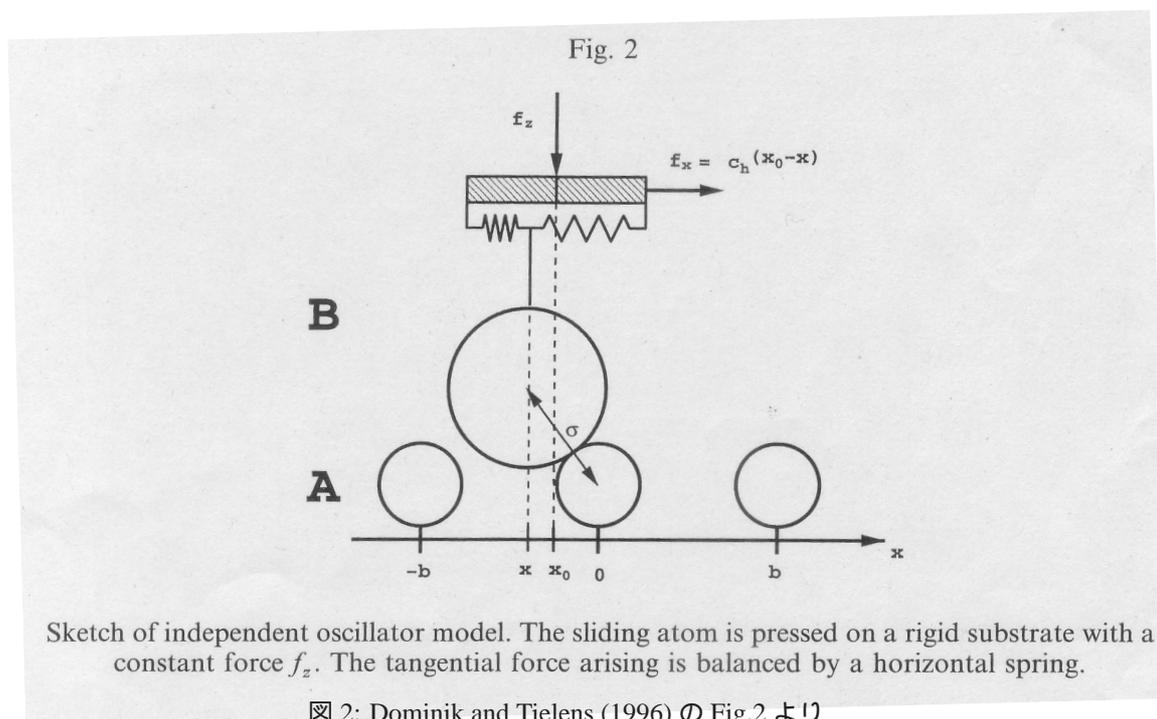
まずは、原子間の相互作用によって生じる摩擦を議論する(2.1節)。これはたとえ表面が“つるつる”であったとしても生じる力である。

表面を滑る原子に作用する力としては、接触している相手の原子からの分子間力(van der Waals力)を想定し、さらに自身の物質内の原子からの力はバネで表現し、それらによるポテンシャルを考えることで作用する力を求める。基本的には、McCelland (1989) および Tománek (1993) に従って議論する。

次に、原子スケールの「段差(step)」= surface roughness による抵抗力を議論する(2.2節)。格子状に並ぶ原子で構成される球が接触・滑ることを考えた場合、必然的に原子スケールの段差が衝突することになる。このことによる抵抗力を導出する。

2.1 物質表面の原子間相互作用による滑り摩擦

2.1.1 Independent Oscillator モデル



ここでは、個々の原子を **Independent Oscillator**(独立振動子)として考える。このことは、注目原子の運動を隣接原子の運動とは独立に取り扱う、というもので、隣接原子が運動することによって生じる注目原子への影響を無視することを意味する。この仮定は、

- 接触している2物体が異なる物質で構成され、原子格子間隔が揃っていない(not commensurable: 一方の物体の格子間隔が他方のその整数倍でない)時

- 若しくは、(同一物質でも) 格子間隔が揃っていない (not aligned: 不適合格子) の時には妥当である。

以下では、Independent Oscillator モデルをもとに滑り時の摩擦力を導出するが、後に示されるように

最大の力 $f_{x,max}$ と平均の力 $f_{x,fric}$

という2種類の力が求められる。もし格子間隔が揃っている場合 (in-phase) には摩擦力が最大となり、slip-stick 運動 (応力がある閾値を超えて初めて滑り出してすぐ止まる、を繰り返す運動) に近くなると考えられ、このときの摩擦力が Independent Oscillator モデルで得られる最大の力に相当すると考えられる。また、格子間隔が揃っていない場合 (not in-phase) には、摩擦力は最小となり、これが Independent Oscillator モデルで得られる平均の力に相当すると考えられる。

具体的に $f_{x,max}$, $f_{x,fric}$ を求めるにあたっては、物体 A 上を物体 B が滑ることを考え、格子間隔 b で固定されて並んでいる A の原子上を移動していく B の原子1つに注目し、その力の釣り合いを考える (図2)。A の面上に xy 平面を設定し、A から B に向かう方向に z 軸を設定する。A の各原子は図2のように固定配置され、 x 軸に沿って注目する B の原子 (以下、注目 B 原子と呼ぶことにする) が移動する。注目 B 原子の位置を $(x, 0, z)$ とする。

注目 B 原子に働く作用としては

- 近傍にある A の各原子 i からの作用 = 分子間力 (van der Waals 力)
 - Lennard-Jones potential で表現 (図3):

$$V_{\text{pair}}(r) = 4\epsilon \left\{ \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right\} \quad (2.1)$$

ここで、 r は注目する B の原子と A の原子との距離で $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2 + (z - z_i)^2}$ 、 σ は注目 B 原子と接触している A の原子との典型的な距離 (一般的には σ は原子・分子直径。Lennard-Jones potential の場合は速度 0 で近付いた時の最接近距離となる)。

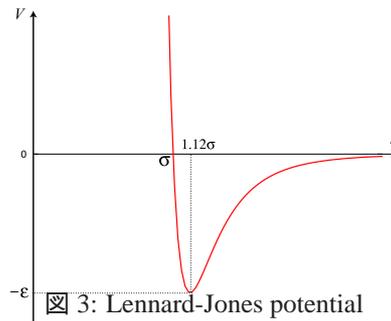


図3: Lennard-Jones potential

- B の他の原子からの作用 = 結合力 (binding force)
 - 滑る方向 (x 方向): バネ定数 c_h 、平衡点 x_0 のバネで表現

$$f_x = c_h (x_0 - x) \quad (2.2)$$

- 垂直方向 (z 方向): 簡単に、一定の力 $-f_z$ で表現。

物体 B 全体の動き (位置) は x_0 であらわされる。以上の作用を考慮して、ある x_0 に対して注目 B 原子にかかる力が釣り合う位置 x を求めることを目指す。このことは、B 全体としての動き x_0 と注目 B 原子の動き x を準静的に追っていくことを意味する。

さらに、その釣り合いの位置で注目 B 原子に働く f_x を求める。 f_x は滑る原子にかかる滑り方向のバネの力であるが、これは作用反作用を考えれば物体 B を動かすの必要な外力であり、つまりは摩擦力を意味する。

以下では、物理量を ε と σ を用いて無次元化したものとして取り扱う (無次元化したものには $\hat{}$ を冠することにする)。即ち、長さスケールは σ 、エネルギーは ε 、力は ε/σ 、バネ定数は ε/σ^2 で各々規格化されているものとする。(後に ε や c_i を現実の物性値を用いて表して、得られた無次元パラメーターの関係式を最終的な関係式にする。)

2.1.2 A が作るポテンシャル

間隔 b で格子状に並んでいる A の原子のうち、原点付近にある注目 B 原子 ($x, 0, z$) に作用する近傍原子として、

$$-6b \leq x_i \leq 6b, \quad -b \leq y_i \leq b, \quad -b \leq z_i \leq 0$$

に位置する 78 個 (= $13 \times 3 \times 2$) からの作用を考える。ここで簡単のために $b \approx \sigma$ とすると、無次元化した座標系では、上記範囲は

$$-6 \leq \hat{x}_i \leq 6, \quad -1 \leq \hat{y}_i \leq 1, \quad -1 \leq \hat{z}_i \leq 0.$$

これらの A の原子が注目 B 原子の位置に作るポテンシャルの寄与の合計を \hat{V}_{AB} とすると、

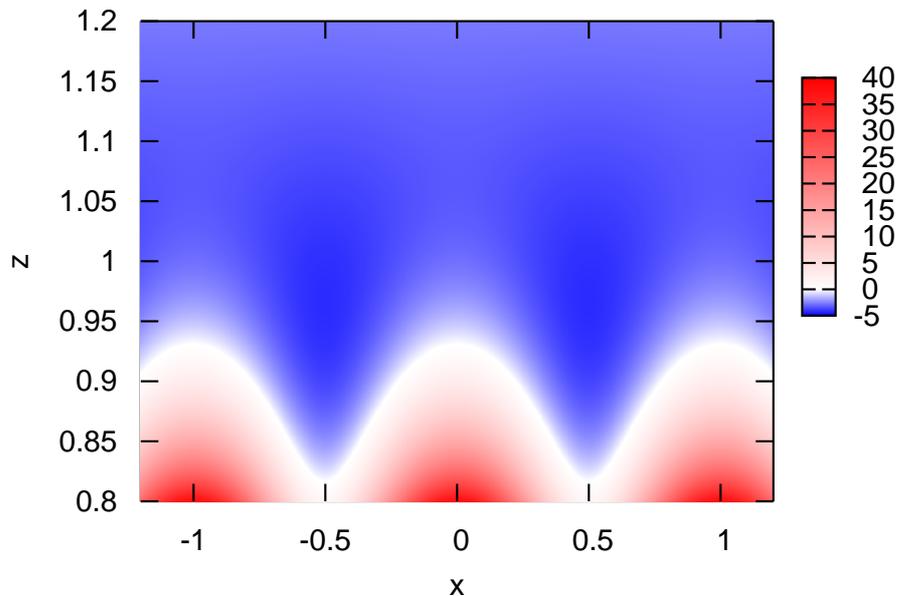


図 4: A の原子群が $(\hat{x}, 0, \hat{z})$ につくるポテンシャル \hat{V}_{AB} の等高線マップ

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}) &= \sum_i \hat{V}_{\text{pair}}(\hat{r}_i) \\
&= \sum_i 4 \{ \hat{r}_i^{-12} - \hat{r}_i^{-6} \}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで \hat{V}_{pair} は式 (2.1) で与えられる Lennard-Jones potential を無次元化したもの。また \hat{r}_i は注目 B 原子と各 A 原子との距離で $\hat{r}_i = \sqrt{(\hat{x} - \hat{x}_i)^2 + \hat{y}_i^2 + (\hat{z} - \hat{z}_i)^2}$ 。 \hat{V}_{AB} を数値的に計算したものを図 4 に示す。

2.1.3 B の他の原子からの作用が作るポテンシャル

注目 B 原子に他の B の原子が及ぼす作用によるポテンシャルは、

$$\hat{V}_{BB}(\hat{x}, \hat{x}_0, \hat{z}) = \hat{z} \hat{f}_z + \frac{1}{2} \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x})^2 \tag{2.4}$$

2.1.4 注目 B 原子の全ポテンシャル

上記 \hat{V}_{AB} と \hat{V}_{BB} から

$$\begin{aligned}
\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0, \hat{z}) &= \hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{V}_{BB}(\hat{x}, \hat{x}_0, \hat{z}) \\
&= \hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{z} \hat{f}_z + \frac{1}{2} \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x})^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.5 z 方向の釣り合いを考慮した全ポテンシャル

まず、z 方向（垂直方向）には、注目 B 原子は常に釣り合いの位置にあるとする。従って、 \hat{z} についての方程式

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0, \hat{z}) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \hat{z}} (\hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{z} \hat{f}_z) = 0 \tag{2.6}$$

を解くことで、z 方向の釣り合いの位置 $\hat{z}_{eq}(\hat{x})$ を決める（図 5）。

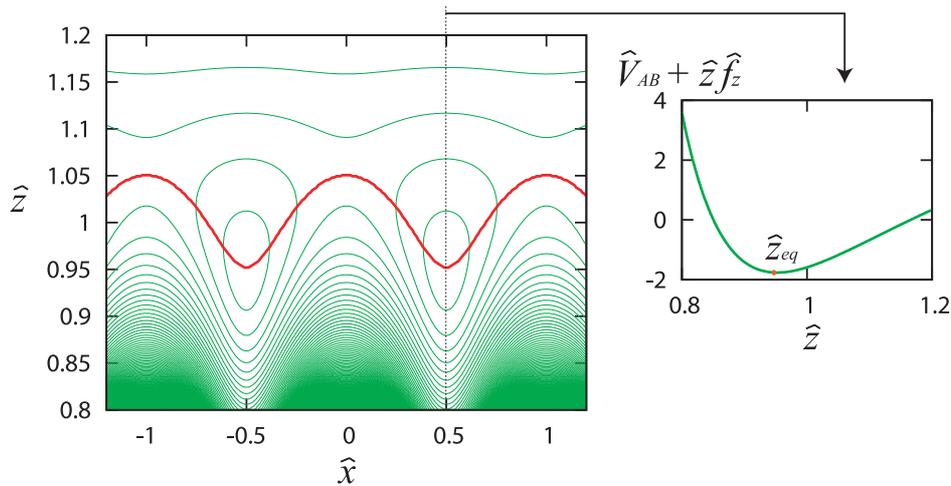


図 5: 左: $\hat{f}_z = 2.5$ とした時の $\hat{V}_{AB} + \hat{z} \hat{f}_z$ の等高線。赤線は \hat{x} に対する \hat{z}_{eq} をプロットしたもの。右: $\hat{x} = 0.5$ とした場合の $\hat{V}_{AB} + \hat{z} \hat{f}_z$ を \hat{z} の関数としてプロットしたもの。

\hat{z}_{eq} を用いると、全ポテンシャルは \hat{x} と \hat{x}_0 の関数となり、

$$\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0) = \hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}_{eq}(\hat{x})) + \hat{z}_{eq}(\hat{x}) \hat{f}_z + \frac{1}{2} \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x})^2 \quad (2.7)$$

$$= \hat{V}_0(\hat{x}) + \frac{1}{2} \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x})^2. \quad (2.8)$$

ここで、 $\hat{V}_0(\hat{x}) \equiv \hat{V}_{AB}(\hat{x}, \hat{z}_{eq}(\hat{x})) + \hat{z}_{eq}(\hat{x}) \hat{f}_z$ とおいた。例えば $\hat{f}_z = 2.5$, $\hat{c}_h = 8.0$ とした場合の $\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0)$ は図 6 のようになる。

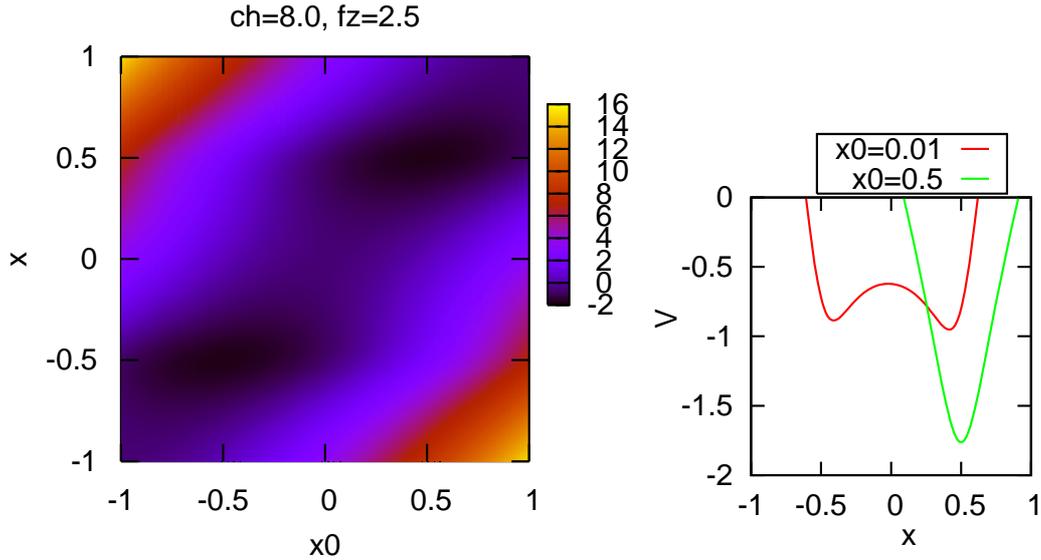


図 6: 左: $\hat{c}_h = 8.0$, $\hat{f}_z = 2.5$ とした場合の $\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0)$ の等高線マップ。右: $\hat{x}_0 = 0.01$ の場合 (赤) および $\hat{x}_0 = 0.5$ の場合 (緑) の \hat{V} をそれぞれ \hat{x} の関数としてプロットしたもの。 $\hat{x}_0 = 0$ 付近では鞍点になっていることがわかる。

2.1.6 \hat{x}_0 に対する \hat{x} の釣り合いの位置、バネの力

物体 B 全体の滑り運動の位置を表す \hat{x}_0 に対して、注目 B 原子が釣り合う位置 $\hat{x} = \hat{x}(\hat{x}_0)$ は、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0) = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{V}_0(\hat{x}) - \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x}) = 0 \quad (2.9)$$

を解いて求められる。また、その平衡点におけるバネの力 (= 滑らせるのに必要な最低限の力) は、

$$\hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0) = \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x}(\hat{x}_0)) = \left. \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{V}_0(\hat{x}) \right|_{\hat{x}=\hat{x}(\hat{x}_0)} \quad (2.10)$$

で得られる。

ただし、図 6 を見るとわかるように、全ポテンシャル $\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0)$ には鞍点が存在する。そのため \hat{x}_0 に対し平衡解 $\hat{x} = \hat{x}(\hat{x}_0)$ が複数存在 (鞍点では不安定解) し一意に決まらない場合がある。そこで、 $+x$ 方向に B が滑っていくことを想定した場合に、注目 B 原子は以下のように移動すると考える：

- B 全体の動きを表す \hat{x}_0 は $+x$ 方向に準静的に動くとする。
- 注目 B 原子 $\hat{x}(\hat{x}_0)$ は、 \hat{x}_0 の移動に従ってやはり $+x$ 方向に準静的に動くことになる。ただし、一意に定まらない時には、 \hat{x} は複数ある平衡点のうち、直前の平衡点に最近接の平衡点とする。これは注目 B 原子があまり進まずに「とどまる」ことを意味する。
- $+x$ 方向近傍に平衡点が見当たらなくなると、より遠くの平衡点に「ジャンプ」して移動する。

以上のような $\hat{x}(\hat{x}_0)$ の動きを、様々な \hat{c}_h 、 \hat{f}_z の値に対して図示したものが図 7-12 にある。

- いずれの場合も、 $\hat{x}(\hat{x}_0)$ と \hat{x}_0 は「抜きつ抜かれつ」の動きをする。つまり、注目 B 原子が A の原子に「引っかかる」と注目 B 原子は遅れだし、バネが伸びる。引っかかりから「脱する」に十分な力をバネから受けると注目 B 原子は先に進む。
- \hat{f}_z と \hat{c}_h の値によっては、注目 B 原子の移動が連続的であったり（図 7, 12）、不連続であったりする（図 8-11）。大きな傾向としては、 \hat{f}_z が大きいほど（「押さえつけられる」ほど）、 \hat{c}_h が小さいほど（「バネが軟らかい」ほど）、不連続になる。不連続になる条件については後に詳述する。

さらに、B 全体と注目 B 原子の位置の差 $\hat{x}_0 - \hat{x}(\hat{x}_0)$ が求められ、そこから式 (2.10) にあるように注目 B 原子にかかるバネの力 $\hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0)$ が求められる。図 7-12 には、これらの結果も示す。バネの力も位置同様、連続の場合もあれば不連続の場合もある。

求められた $\hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0)$ から、次の 2 種類の力、即ち滑らせるのに必要な最大の力 $\hat{f}_{x,\max}$ と平均的な力 $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ を定義する：

$$\hat{f}_{x,\max} \equiv \max \{ \hat{c}_h (\hat{x}_0 - \hat{x}(\hat{x}_0)) \} = \max \left\{ \frac{d}{d\hat{x}} \hat{V}_0(\hat{x}) \right\} \quad (2.11)$$

$$\hat{f}_{x,\text{fric}} \equiv \frac{1}{\hat{l}} \int_0^{\hat{l}} \hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0) d\hat{x}_0 \quad (2.12)$$

平均を取る長さ \hat{l} は A の格子間隔に選べばよいので、 $\hat{l} = 1$ 。

- $\hat{V}_0(\hat{x})$ の表式 (2.8) を考慮すれば、最大力 $\hat{f}_{x,\max}$ は、式 (2.11) の最右辺から、 \hat{c}_h によらず、 \hat{f}_z のみで決まる

$$\hat{f}_{x,\max} = \hat{f}_{x,\max}(\hat{f}_z) \quad (2.13)$$

即ち、バネの強弱に依らない。これはバネの力が $\hat{f}_{x,\max}$ に達するまで、バネが伸びることを意味する。バネ定数が小さければよりバネが伸び、 \hat{x}_0 と $\hat{x}(\hat{x}_0)$ の差が大きくなる。

- 平均力 $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ は、 $\hat{x}(\hat{x}_0)$ が連続に変化する（このとき $\hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0)$ も連続）場合には、

$$\hat{f}_{x,\text{fric}} = 0$$

である。これは平均すると摩擦なし、ということの意味する。 $\hat{x}(\hat{x}_0)$ が不連続の場合には、

$$\hat{f}_{x,\text{fric}} > 0$$

となり、平均しても摩擦力は消えずに残る。

ch = 8., fz = - 5.

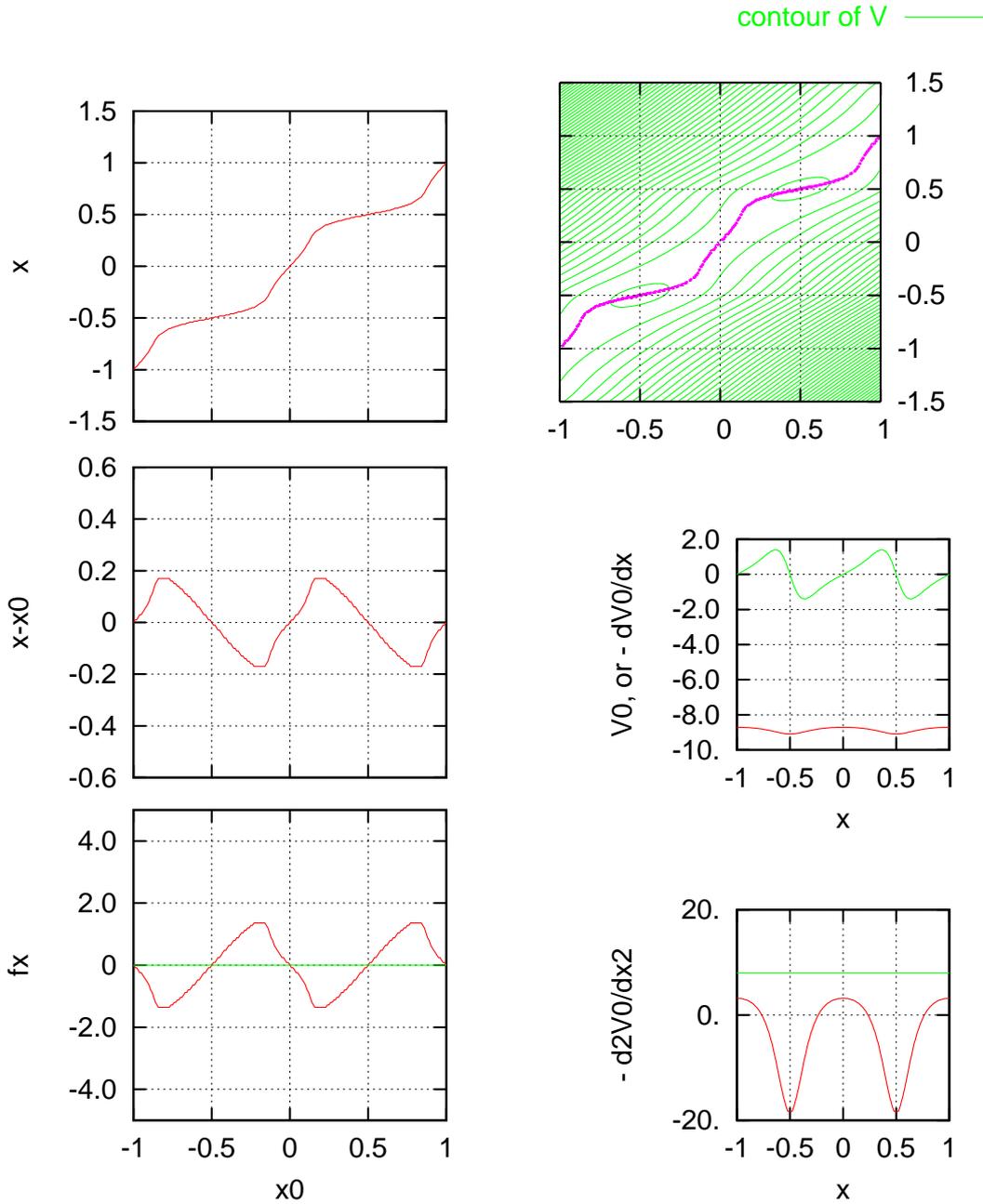


図 7: $\hat{c}_h = 8.0$, $\hat{f}_z = -5.0$ とした場合の $\hat{x}(\hat{x}_0)$ (左上)、 $\hat{x}(\hat{x}_0) - \hat{x}_0$ (左中)、 $\hat{f}_x(\hat{x}(\hat{x}_0), \hat{x}_0)$ (左下)。左下図の緑色の線は、平均した力 $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ の値。右上: $\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0)$ の等高線マップに $\hat{x}(\hat{x}_0)$ (桃色線) を重ねて表示したもの。右中: $\hat{V}_0(\hat{x})$ (赤) 及び $-\frac{d}{d\hat{x}}\hat{V}_0(\hat{x})$ (緑) を表示したもの。 $\hat{V}_0(\hat{x})$ は注目 B 原子が位置 \hat{x} にある時の、バネ作用を除いたポテンシャルを表す。また $-\frac{d}{d\hat{x}}\hat{V}_0(\hat{x})$ はそのポテンシャルにより生じる作用力。右下: $-\frac{d^2}{d\hat{x}^2}\hat{V}_0(\hat{x})$ をプロット (赤)。緑線は \hat{c}_h の値を示す。

$ch = 8., fz = 0.$

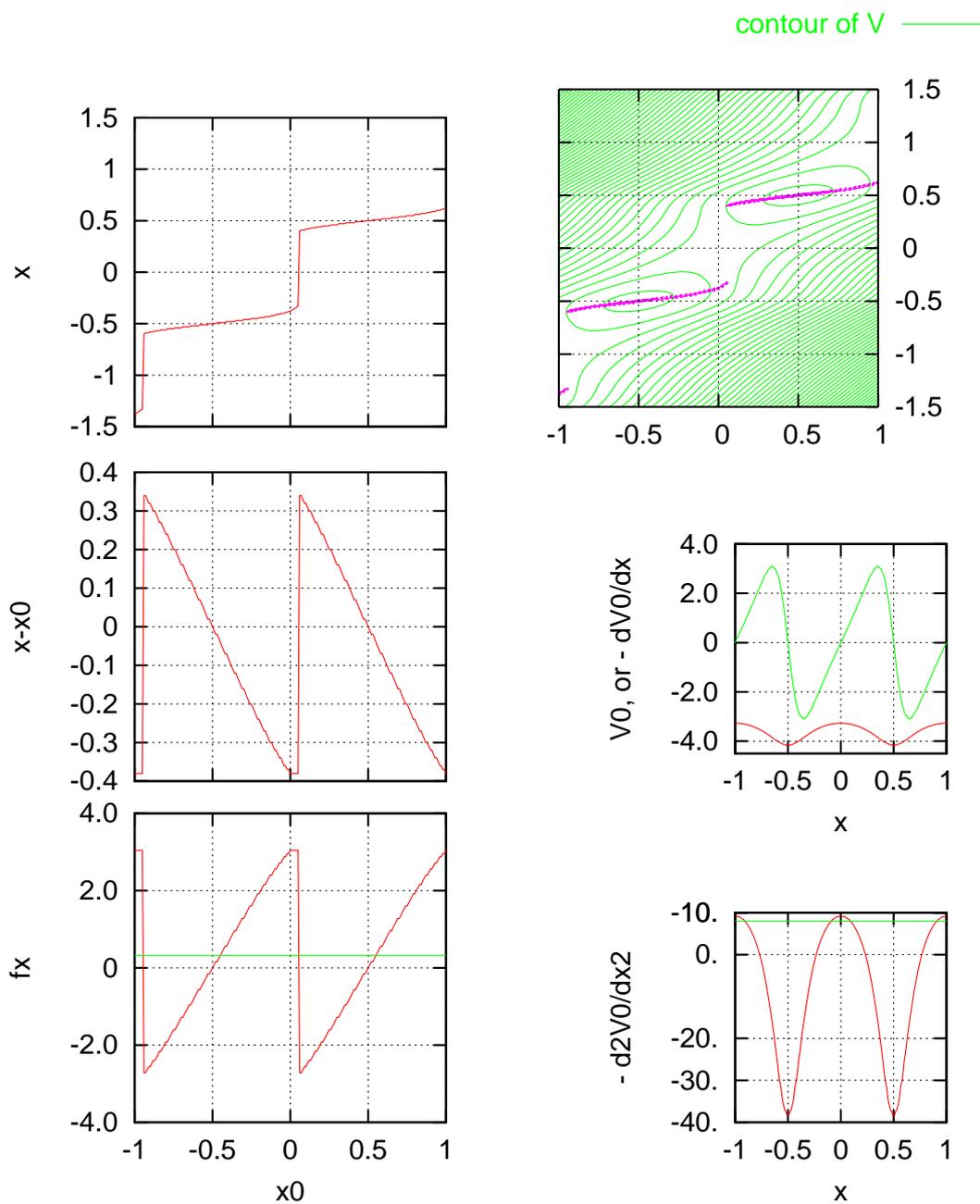


図 8: $\hat{c}_h = 8.0, \hat{f}_z = 0.0$ とした場合。他は図 7 と同様。

ch = 8., fz = 2.5

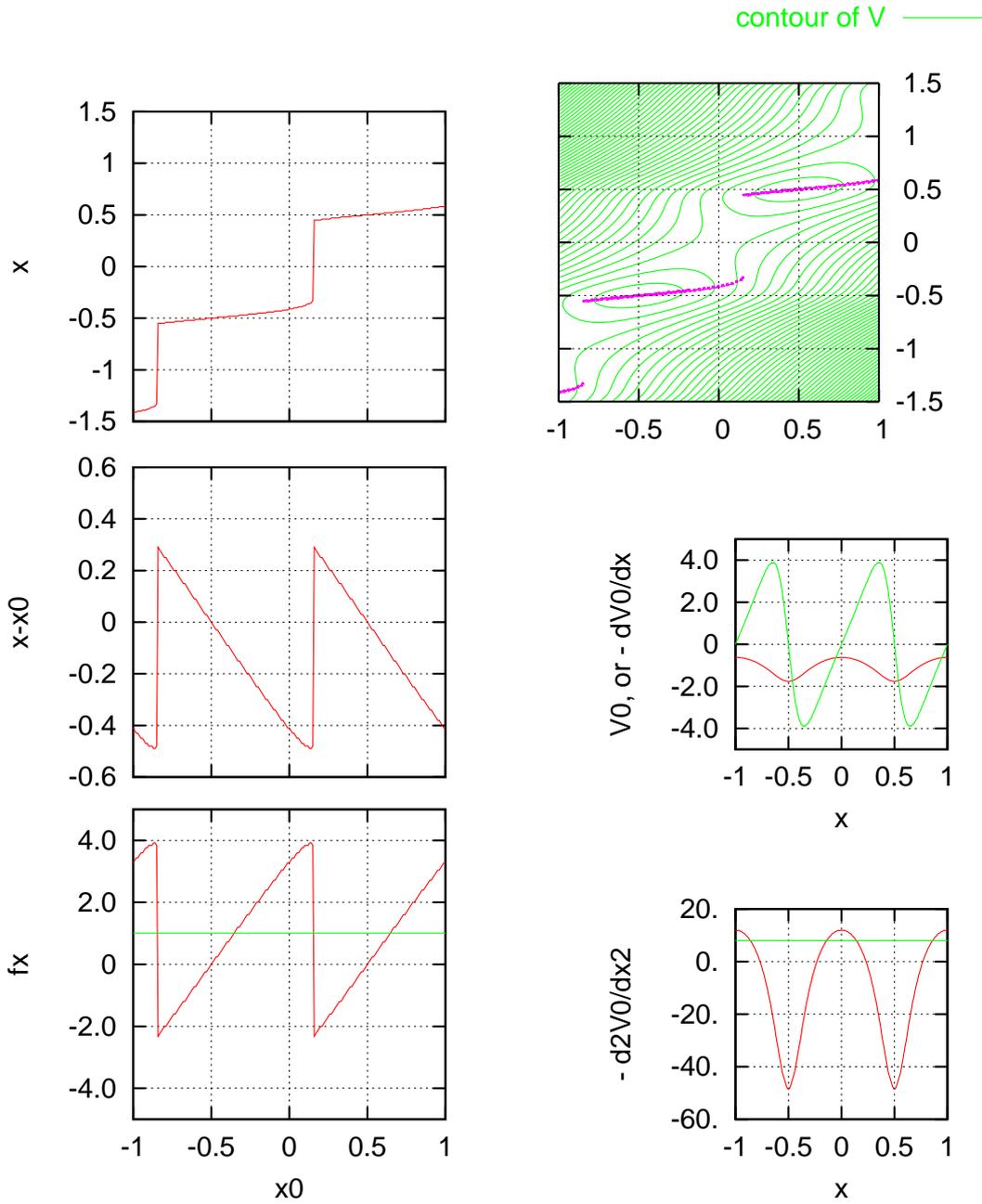


図9: $\hat{c}_h = 8.0$, $\hat{f}_z = 2.5$ とした場合。他は図7と同様。

ch = 8., fz = 5.

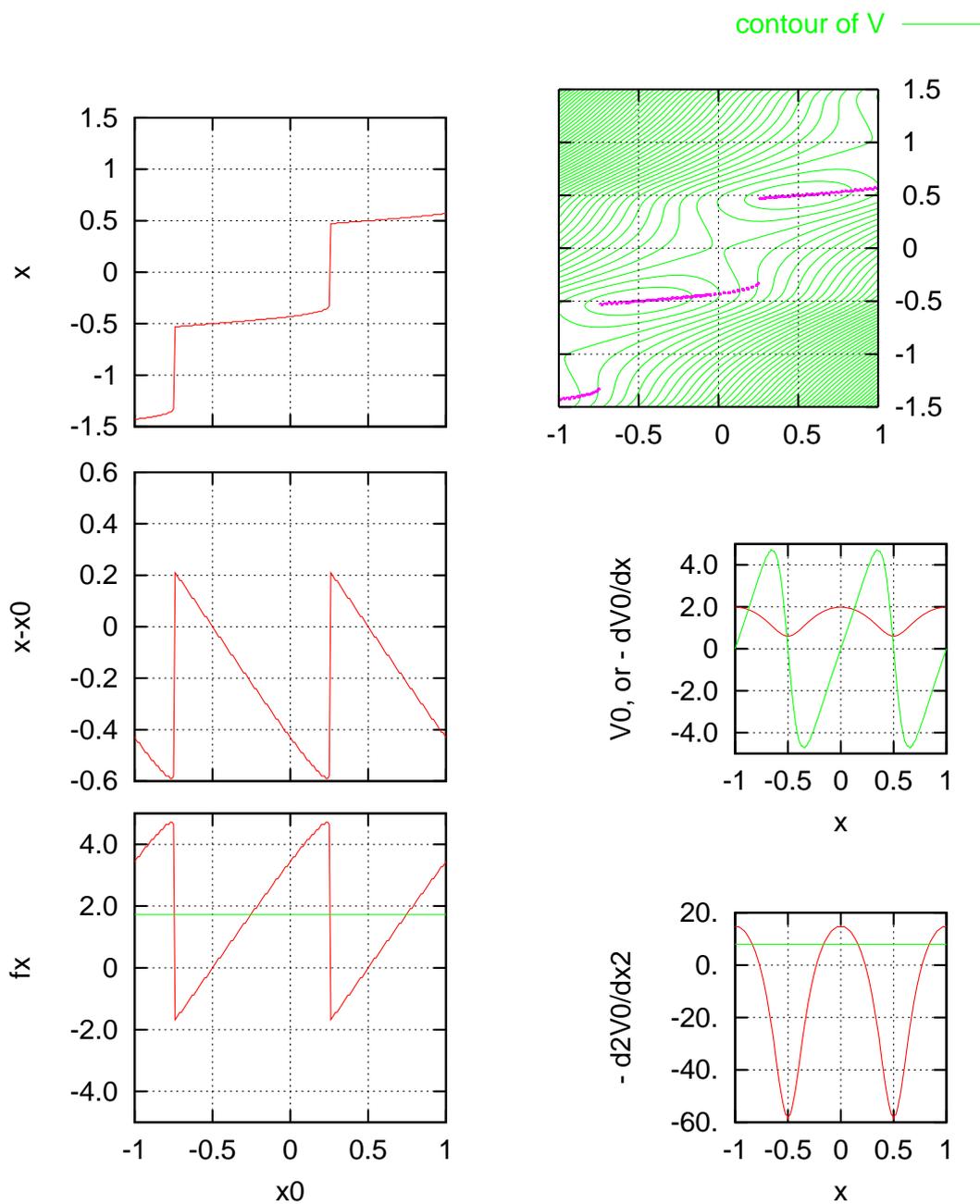


図 10: $\hat{c}_h = 8.0$, $\hat{f}_z = 5.0$ とした場合。他は図 7 と同様。

ch = 8., fz = 10.

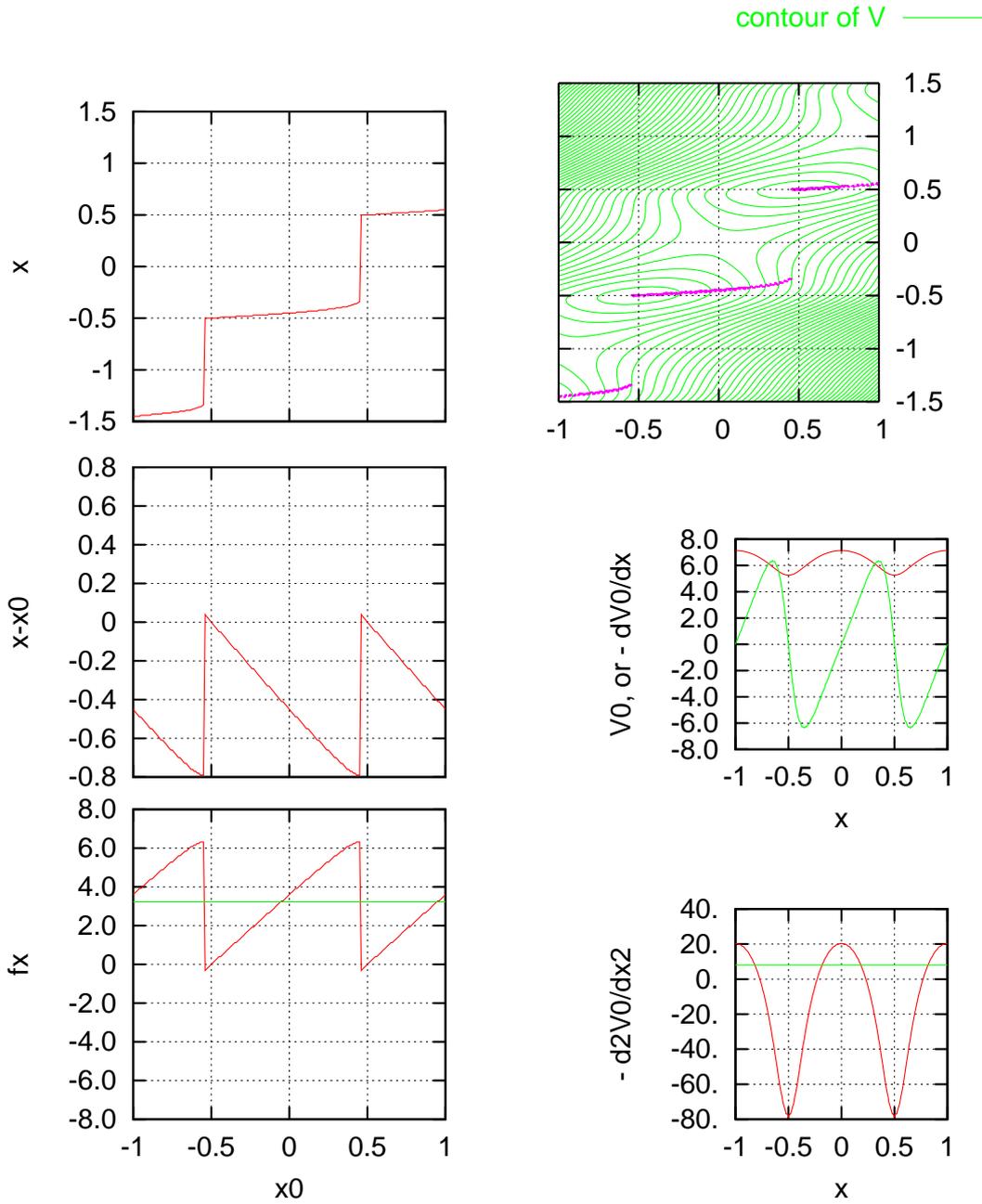


図 11: $\hat{c}_h = 8.0$, $\hat{f}_z = 10.0$ とした場合。他は図 7 と同様。

ch = 20., fz = 2.5

contour of V ———

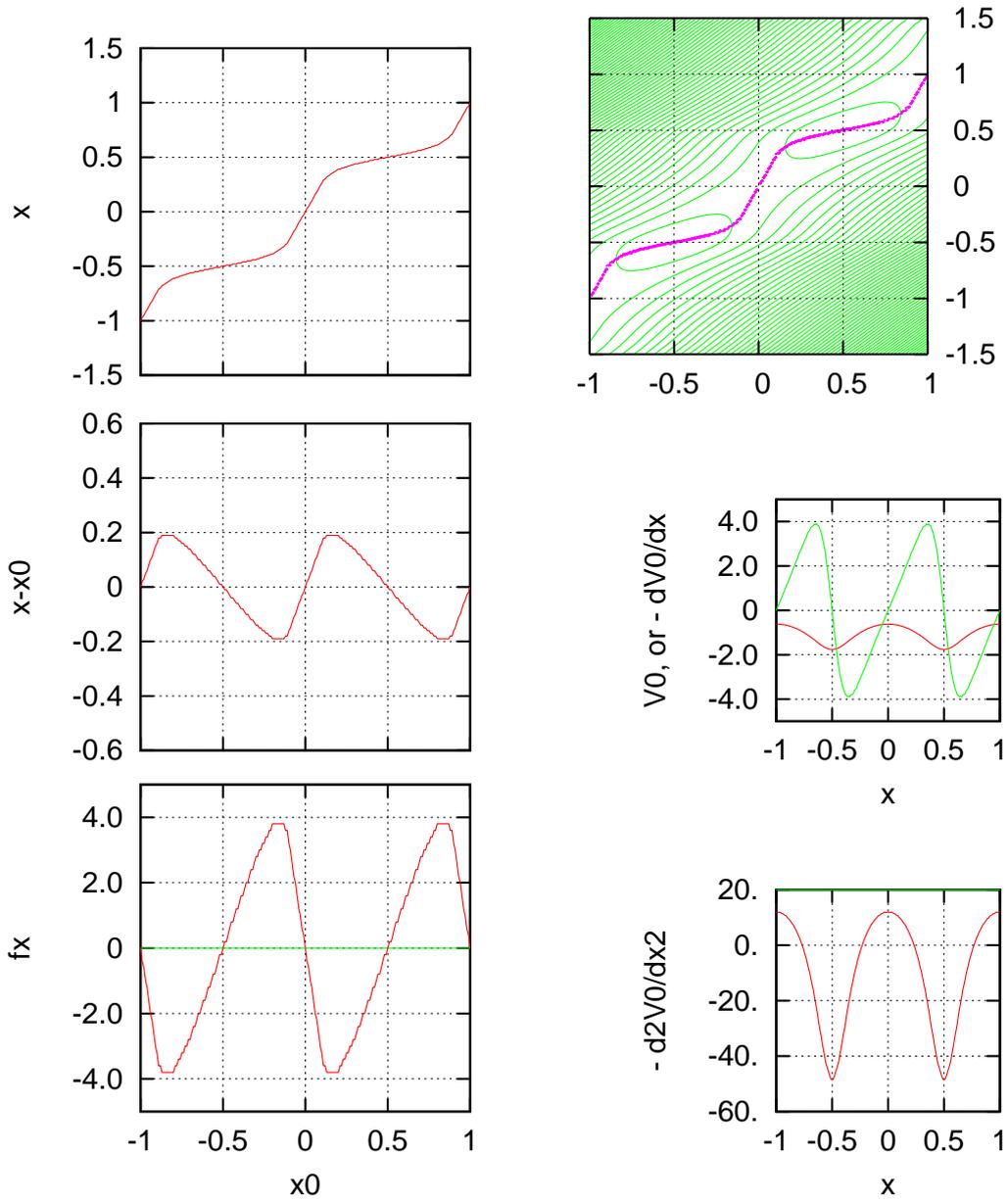


図 12: $\hat{c}_h = 20.0$, $\hat{f}_z = 2.5$ とした場合。他は図 7 と同様。

2.1.7 エネルギー散逸とパラメーターについての議論

注目 B 原子が「ジャンプ」して移動すると、ジャンプ前後のエネルギーの差だけ、エネルギーが散逸すると考えられる（実際には自由振動などの運動エネルギーになりやがて散逸する）。このエネルギー散逸量は平均的摩擦力 $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ がする仕事と等しい（はず）。先に述べたように、全ポテンシャル \hat{V} に鞍点があると「ジャンプ」が生じるので、エネルギーが散逸しない（即ち $\hat{f}_{x,\text{fric}} = 0$ となる）ための十分条件は、変曲点が存在しないこと²、すなわち

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0) > 0. \quad (2.14)$$

$\hat{V}(\hat{x}, \hat{x}_0)$ の式 (2.8) を代入して、 \hat{c}_h についての次の条件が得られる

$$\hat{c}_h > -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{V}_0(\hat{x}). \quad (2.15)$$

したがって、バネ定数には閾値が存在し、それを \hat{c}_{crit} とすると

$$\hat{c}_{\text{crit}} = \max \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{V}_0(\hat{x}) \right\} \quad (2.16)$$

$\hat{V}_0(\hat{x})$ においては、 \hat{f}_z がパラメーターであるから、結局 \hat{c}_{crit} は \hat{f}_z の（増加）関数で、

$$\hat{c}_{\text{crit}} = \hat{c}_{\text{crit}}(\hat{f}_z). \quad (2.17)$$

したがって、

$$\begin{cases} \hat{c}_h > \hat{c}_{\text{crit}}(\hat{f}_z) & \implies \hat{f}_{x,\text{fric}} = 0, \text{ エネルギー散逸しない。} \\ \hat{c}_h < \hat{c}_{\text{crit}}(\hat{f}_z) & \implies \hat{f}_{x,\text{fric}} > 0, \text{ エネルギー散逸。} \end{cases} \quad (2.18)$$

このことは、図 7-12 において確かめられる（各図にある右下の図に注目。）。

定性的には、次のように理解できる。 \hat{f}_z が大きい、つまり接触面を垂直に抑える力が大きいと、注目 B 原子 \hat{x} は A の原子に「引っかかって」しまいなかなか先に進めず B 全体 \hat{x}_0 だけがどんどん先に進んでしまう（バネが伸びる）。バネが十分に伸びてようやく乗り越えたときには、 \hat{x}_0 はずいぶん先に進んでおり、そのときの平衡点におけるバネの力（の絶対値）は小さい。したがって、 $\hat{f}_{x,\text{fric}} > 0$ となる。

式 (2.17) は、逆に考えると、ある \hat{c}_h に対して閾値となる \hat{f}_z が決まることを意味する。その \hat{f}_z の閾値を $\hat{f}_{z,\text{crit}}$ とすると、

$$\hat{f}_{z,\text{crit}} = \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h). \quad (2.19)$$

したがって、

$$\begin{cases} \hat{f}_z < \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h) & \implies \hat{f}_{x,\text{fric}} = 0, \text{ エネルギー散逸しない。} \\ \hat{f}_z > \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h) & \implies \hat{f}_{x,\text{fric}} > 0, \text{ エネルギー散逸。} \end{cases} \quad (2.20)$$

²変曲点があっても鞍点が存在しない場合があるのでこの条件は必要条件ではない。

2.1.8 無次元量 $\hat{f}_{z,\text{crit}}$, $\hat{f}_{x,\text{max}}$, $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ の表式

$\hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)$ (式 (2.19)), $\hat{f}_{x,\text{max}}(\hat{f}_z)$ (式 (2.13)), および $\hat{f}_{x,\text{fric}}$ (式 (2.20)) を数値的に求めると (図 13. $\hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)$ は実際には式 (2.17) を求めて算出)

$$\hat{f}_{z,\text{crit}} = 0.89\hat{c}_h - 8.24 \quad (2.21)$$

$$\hat{f}_{x,\text{max}} = 0.34\hat{f}_z + 3.07 \quad (2.22)$$

$$\hat{f}_{x,\text{fric}} = \begin{cases} 0 & (\text{for } \hat{f}_z < \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) \\ 0.33(\hat{f}_z - \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) & (\text{for } \hat{f}_z > \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) \end{cases} \quad (2.23)$$

今後のために、各係数の数値を文字にして表して

$$\hat{f}_{z,\text{crit}} = \alpha_1\hat{c}_h + \beta_1 \quad (2.24)$$

$$\hat{f}_{x,\text{max}} = \alpha_2\hat{f}_z + \beta_2 \quad (2.25)$$

$$\hat{f}_{x,\text{fric}} = \begin{cases} 0 & (\text{for } \hat{f}_z < \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) \\ \alpha_3(\hat{f}_z - \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) & (\text{for } \hat{f}_z > \hat{f}_{z,\text{crit}}(\hat{c}_h)) \end{cases} \quad (2.26)$$

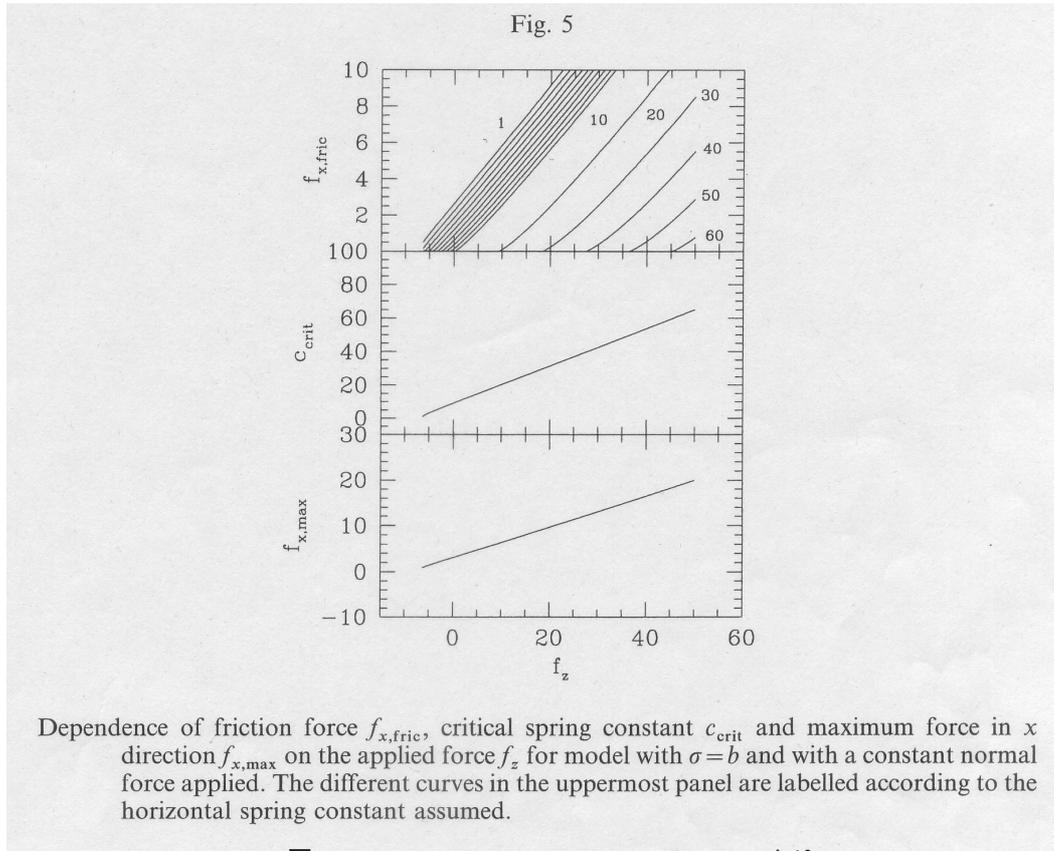


図 13: Dominik and Tielens (1996) の Fig.5 より

2.1.9 ε の表面エネルギー γ による表現

ε および c_h を測定可能な物性値によって表せられれば、これまでに得られた関係式を現実の系に応用できる。

まずは ε について。 ε は分子間相互作用ポテンシャルのモデルである Lennard-Jones ポテンシャル (式 (2.1)) における最低エネルギーを表すパラメーターである。また、分子間引力ポテンシャルは表面エネルギー (表面張力) γ を用いて表すことができる。したがって、 ε を γ を用いて表すことが考えられる。

ここでは、Lennard-Jones ポテンシャルの引力項 (van der Waals 力)

$$w(r) = -\frac{4\varepsilon\sigma^6}{r^6} = -\frac{C}{r^6} \quad (2.27)$$

のみを取り出して考える。 $C = 4\varepsilon\sigma^6$ 。

van der Waals 力は、本来非加算で遅延的である (単純にすべての原子・分子からのポテンシャルを足し合わせることは出来ない) が、ここでは、巨視的物体間の相互作用ポテンシャルを考える上で、加算・非遅延を仮定する。そうすると、2 物体間に働く引力ポテンシャルは、2 物体間のすべての原子・分子から、 $w(r)$ の形のポテンシャルの寄与があるとして、それらを足し合わせて求められる。詳細は教科書 (Israelachvili (1992) など) 参照。結果的に、van der Waals ポテンシャル $w(r)$ を仮定したとき、距離 D だけ離れた 2 つの半無限体 1,2 の表面間の「単位表面積あたり」の引力相互作用ポテンシャルは

$$W_{\text{surface}}(D) = -\frac{\pi C n_1 n_2}{12D^2} \quad (\text{単位表面積あたり}) \quad (2.28)$$

となる。ここで n_1, n_2 はそれぞれの物体中の原子数密度。さらに、Hamaker constant³

$$A_H = \pi^2 C n_1 n_2 \quad (2.29)$$

を導入すると、

$$W_{\text{surface}}(D) = -\frac{A_H}{12D^2} \quad (\text{単位表面積あたり}) \quad (2.30)$$

と表される⁴。

2 物体の表面が接触している時の表面間距離を原子間距離程度

$$D \simeq \sigma \quad (2.31)$$

とする⁵。また原子数密度を格子間隔 b_1, b_2 をもちいて

$$n_{1,2} \sim b_{1,2}^{-3} \quad (2.32)$$

と表し⁶、 $C = 4\varepsilon\sigma^6$ を代入すると、接触している面の付着エネルギーは

$$W_{\text{surface}}(\sigma) = -\varepsilon \frac{\pi \sigma^4}{3 b^6}, \quad \text{where } b = \sqrt{b_1 b_2} \quad (2.33)$$

³ちなみに Hamaker constant A_H はほとんど物質によらず、 $\sim 10^{-19}$ J (= 10^{-12} erg) のオーダーであり、多くの凝縮系では、 $A_H = (0.4 - 4) \times 10^{-19}$ J の範囲にある。

⁴ちなみに半径 R_1, R_2 の 2 つの球間の引力相互作用ポテンシャルは、 $W(D) = -\frac{A_H}{6D} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 。

⁵実際には、もっと小さい距離 ($\sim 0.4\sigma$) を用いる必要がある (e.g., Israelachvili, 1992)。

⁶最密充填なら $n = \sqrt{2}b^{-3}$

さて、表面エネルギー γ を考えると、

$$W_{\text{surface}}(\sigma) = -\gamma (\times 2 ?) \quad (2.34)$$

これに式 (2.33) を代入して

$$\gamma = -\varepsilon \frac{\pi \sigma^4}{3 b^6} (\times \frac{1}{2} ?) \quad (2.35)$$

よって

$$\varepsilon = \frac{3 b^6}{\pi \sigma^4} \gamma (\times 2 ?). \quad (2.36)$$

となり、 ε の γ をふくむ物性値で表す式が得られた⁷。また、 $b \sim \sigma$ とすると

$$\varepsilon \sim b^2 \gamma \quad (2.37)$$

2.1.10 c_h の弾性定数を用いた表現

せん断弾性係数 (shear modulus) G を用いてバネ定数 c_h をあらわすことを考える。

互いに滑っている 2 物体 (shear modulus: G_1, G_2) の接触面における歪みを ϵ_1, ϵ_2 とし、働いているシア応力を τ (1,2 共通) とすると、

$$\tau = G_1 \epsilon_1, \quad \tau = G_2 \epsilon_2 \quad (2.38)$$

よって

$$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \tau = \epsilon_1 + \epsilon_2. \quad (2.39)$$

ここで $\frac{1}{G} \equiv \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ とおくと、

$$\tau = G \epsilon \quad (2.40)$$

一方、接線方向にかかる力を Q_x 、変位を x とすると

$$Q_x = c_h x \quad (2.41)$$

原子格子間隔 b を特徴的な変形量とし、上式の両辺を b^2 で割ると

$$\frac{Q_x}{b^2} = \frac{c_h x}{b b} \quad (2.42)$$

$\frac{Q_x}{b^2} = \tau$, $\frac{x}{b} = \epsilon$ と考えれば式 (2.40) と比較して

$$c_h = G b \quad (2.43)$$

$\frac{\varepsilon}{\sigma^2}$ で規格化したバネ定数 \hat{c}_h は、

$$\hat{c}_h = \frac{c_h}{\varepsilon/\sigma^2} = \frac{G b}{\varepsilon/\sigma^2} \sim \frac{G \sigma^2}{\gamma b} \quad (2.44)$$

最後の変形には、 $b \sim \sigma$ としたときの ε の表式 (2.37) を用いた。

⁷Dominik and Tielens (1996, 1997) 中には、? をつけたファクター 2 が抜けている。しかしながら、ファクター 2 をつけたうえで、原子数密度として最密充填の $n = \sqrt{2} b^{-3}$ を用いると、 $\varepsilon = \frac{3}{\pi} \frac{b^6}{\sigma^4} \gamma$ となり、偶然 (?) ながら彼らの導出した式と一致する。また、接触時の表面間距離として $D = 0.4\sigma$ を採用すると、 $\varepsilon = \frac{3}{\pi} \frac{b^6}{\sigma^4} \gamma \times 0.16$ となり、一桁小さくなる。このような不定性はあるが、以降は、 $\varepsilon = \frac{3}{\pi} \frac{b^6}{\sigma^4} \gamma$ で話しを進めることにする。

2.1.11 接触面にかかる圧力 p と摩擦力 q の関係式

式 (2.24)(2.25)(2.26) の力の関係式を有次元化するために $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ を掛け、かつ応力の次元にするために b^2 で割ると、接触面にかかる「単位面積当たり」の摩擦力 q と垂直圧力 p の関係式が得られる。その際、 ε , \hat{c}_h の表式 (2.36)(2.44) も使用する。

- 式 (2.25) から、最大摩擦力 q^{\max} は

$$q^{\max} = \mu^{\max} p + \mu_0^{\max} \quad (2.45)$$

$$\mu^{\max} = \alpha_2 = 0.34 \quad (2.46)$$

$$\mu_0^{\max} = \frac{\varepsilon}{\sigma b^2} \beta_2 = \frac{3\beta_2}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma = \frac{9.21}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma \quad (2.47)$$

- 式 (2.26) および式 (2.24) から、滑り時の平均摩擦力 $q^{\text{slide,io}}$ は

$$q^{\text{slide,io}} = \begin{cases} 0 & (\text{for } p < p_{\text{crit}}) \\ \mu^{\text{slide,io}} p + \mu_0^{\text{slide,io}} & (\text{for } p > p_{\text{crit}}) \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\mu^{\text{slide,io}} = \alpha_3 = 0.33 \quad (2.49)$$

$$\mu_0^{\text{slide,io}} = -\alpha_3 p_{\text{crit}} = -0.33 p_{\text{crit}} \quad (2.50)$$

$$p_{\text{crit}} = \frac{\varepsilon}{\sigma b^2} \hat{f}_{c,\text{crit}} = \frac{\varepsilon}{\sigma b^2} \alpha_1 \hat{c}_h + \frac{\varepsilon}{\sigma b^2} \beta_1 \quad (2.51)$$

$$= \frac{3\alpha_1}{\pi} \frac{b^3}{\sigma^3} G + \frac{3\beta_1}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma = \frac{2.67}{\pi} \frac{b^3}{\sigma^3} G - \frac{24.72}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma \quad (2.52)$$

上添字の io は、Independent Oscillator モデルによる摩擦力であることを明示し、次節の surface roughness による摩擦力と区別するために付した。

2.2 原子スケールの Surface Roughness による滑り摩擦

例えば小さな立方体で構成されている球 (図 14) を想像すればわかるように、結晶格子で構成されている球の表面は滑らかではなく「段差 (step)」がある。球が接触して滑るときにはこの原子スケールの互いの段差が衝突し、抵抗となる。

段差同士が衝突すると、「かど」の原子が表面に押し込まれることで段差が解消され滑ることができると考えられる (図 15)。

一つの原子を表面に押し込むのには、押し込まれる箇所の両隣の原子を b だけ離す必要があり、それはバネ定数

$$c \simeq Gb \quad (2.53)$$

のバネを b だけ伸ばすことに相当する (バネ定数の与え方は 2.1.10 節参照)。

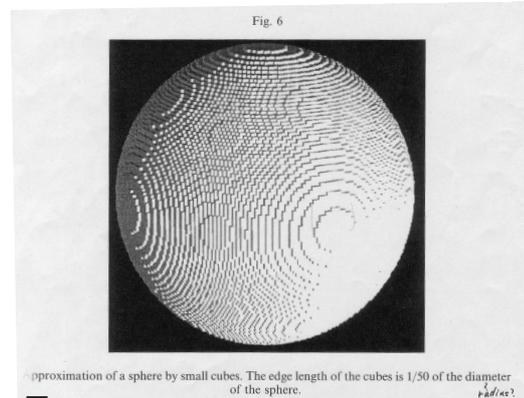


図 14: Dominik and Tielens (1996) の Fig.6 より

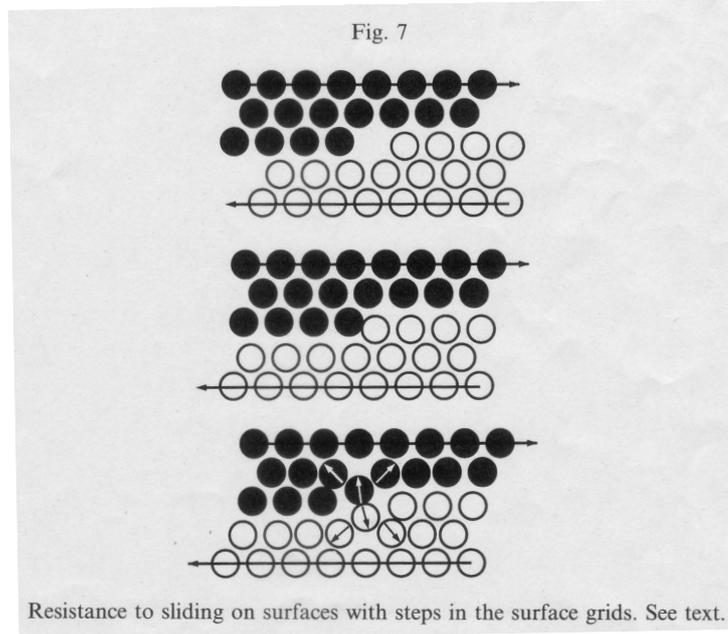


図 15: Dominik and Tielens (1996) の Fig.7 より

従って1つの段差を解消して滑るのに必要なエネルギーを U_{step} とすると

$$U_{step} \approx \frac{1}{2}cb^2 = \frac{1}{2}Gb^3. \quad (2.54)$$

滑っている時に段差を解消するのに必要な全エネルギーは、滑っている間に出会う（押しつぶす）段差の数を U_{step} に掛けたもの、となる。そこで、単位面積が単位長さ滑ったときに出会う段差数 N_s を求める。

球の大円の一周上にある段差数は、

$$\sim \frac{2R}{b}. \quad (2.55)$$

すると単位長さあたりの段差数 Λ は、

$$\Lambda \approx \frac{\frac{2R}{b}}{2\pi R} = \frac{1}{\pi b}. \quad (2.56)$$

単位面積上に存在する段差数を Σ とすると、幅 b の帯を考えれば

$$\Sigma = \frac{\Lambda}{b} \approx \frac{1}{\pi b^2}. \quad (2.57)$$

従って、

$$N_s = \Sigma \times \Lambda = \frac{1}{\pi^2 b^3} \quad (2.58)$$

となり、単位面積が単位長さ滑るのに必要なエネルギーは、

$$U_{step} \times N_s = \frac{G}{2\pi^2}. \quad (2.59)$$

滑っているときに一定のシア応力 $q^{\text{slide,step}}$ がかかるとし、これがする仕事が上に述べたエネルギーになるとすると、滑り距離を L として次の関係式が成り立つ

$$q^{\text{slide,step}} \times L = \frac{G}{2\pi^2} \times L. \quad (2.60)$$

従って、

$$q^{\text{slide,step}} = \frac{G}{2\pi^2}. \quad (2.61)$$

ゆえに、球同士が滑る時の、原子スケールの段差による単位面積当たりの摩擦力は上の式であたえられる。前節の形式にあわせると、

$$q^{\text{slide,step}} = \mu_0^{\text{slide,step}} = \frac{G}{2\pi^2} \quad (2.62)$$

2.3 JKR 理論による球接触面の圧力分布

前節までで、単位面積当たりの摩擦力と圧力の関係が得られたので、これを表面エネルギー γ で接触している弾性球の接触面に適用すれば、接触球が滑るときの摩擦力が求められる。ここではそのための準備として、表面エネルギー γ で接触している弾性球についてのモデルである JKR 理論の結果についてまとめておく。

半径 R_1, R_2 、ヤング率 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_1, ν_2 の 2 つの弾性球が、表面エネルギー γ のもとで接触している。

外力なしで弾性力と付着力が釣り合っている時の接触面 (円) の半径は、

$$a_0 = \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.63)$$

ここで、 R, E^* はそれぞれ 2 球の換算半径および換算修正ヤング率：

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{E^*} \equiv \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (2.64)$$

静かに (準静的に) 球を引き離すのに必要な力は

$$F_c = 3\pi\gamma R \quad (2.65)$$

また釣り合っている時の球の中心間の接近変位は

$$\delta_0 = \frac{a_0^2}{3R} = \frac{F_c}{E^* a_0} \quad (2.66)$$

接触円の半径 a と 2 球間に働く力 F の関係は、 $\hat{a} = \frac{a}{a_0}$ として

$$\frac{F}{F_c} = 4(\hat{a}^3 - \hat{a}^{\frac{3}{2}}). \quad (2.67)$$

接触面上の垂直圧力分布は、接触面の中心からの距離を r として

$$p(r, a) = 6 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a}^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

2.4 滑り摩擦力

単位面積当たりの摩擦力が q のとき、接触面全体での摩擦力は

$$Q_x = \iint q \, dx dy \quad (2.69)$$

で与えられる。 q としてこれまでに求められた式 (2.45)(2.48)(2.62) を用い、さらに JKR 理論に基づく接触面圧力分布 (式 (2.68)) を用いて、接触弾性球同士が滑るときの摩擦力を求める。

2.4.1 Maximum force in the independent oscillator model

$$\begin{aligned}
Q_x^{\max} &= \int_0^a q^{\max}(r) 2\pi r dr \\
&= \int_0^a (\mu^{\max} p(r, a) + \mu_0^{\max}) 2\pi r dr \\
&= \mu^{\max} \int_0^a 2\pi r p(r, a) dr + \pi a^2 \mu_0^{\max}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

2 球間に働く力 F は、

$$F = \int_0^a 2\pi r p(r, a) dr \tag{2.71}$$

だから

$$Q_x^{\max} = \mu^{\max} F + \pi a^2 \mu_0^{\max} = 0.34F + 0.21a^2 \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma \tag{2.72}$$

2.4.2 Average friction force for non-matching grids in the independent oscillator model

この摩擦力は、圧力 p が、 $p > p_{\text{crit}}$ の領域（それを $r < r_c$ とする: $p(r_c, a) = p_{\text{crit}}$ ）のみ働く。よって、

$$\begin{aligned}
Q_x^{\text{slide,io}} &= \int_0^{r_c} q^{\text{slide,io}}(r) 2\pi r dr \\
&= \int_0^{r_c} (\mu^{\text{slide,io}} p(r, a) + \mu_0^{\text{slide,io}}) 2\pi r dr \\
&= 2\pi \int_0^{r_c} \mu^{\text{slide,io}} r \left\{ 6 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a}^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} dr + \pi r_c^2 \mu_0^{\text{slide,io}} \\
&= 4\mu^{\text{slide,io}} F_c \left[\hat{a}^3 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r_c^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} - \hat{a}^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r_c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] + \pi r_c^2 \mu_0^{\text{slide,io}}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

- $r_c = 0$ 、すなわち

$$p(0, a) = \frac{2F_c}{\pi a_0^2} (3\hat{a} - \hat{a}^{-\frac{1}{2}}) < p_{\text{crit}} \tag{2.74}$$

のときには、

$$Q_x^{\text{slide,io}} = 0. \tag{2.75}$$

- また、 $r_c \rightarrow a$ のときには（JKR 理論では接触面の縁 ($r = a$) では圧力は負に発散するのでありえないが）

$$Q_x^{\text{slide,io}} = \mu^{\text{slide,io}} F + \pi a^2 \mu_0^{\text{slide,io}} = 0.33F - 0.33p_{\text{crit}} \pi a^2 \tag{2.76}$$

p_{crit} は、式 (2.51) で与えられ

$$p_{\text{crit}} = \frac{2.67}{\pi} \frac{b^3}{\sigma^3} G - \frac{24.72}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma \tag{2.77}$$

2.4.3 Friction force due to grid steps on surfaces

$$Q_x^{\text{slide,steps}} = \pi a^2 \mu_0^{\text{slide,steps}} = \frac{Ga^2}{2\pi}. \tag{2.78}$$

2.5 捩れに対する抵抗モーメント

捩れ (twist) 運動に対する抵抗も、これまでに述べた滑りに対する抵抗 (摩擦) によって生じる。捩れの場合には、単位面積当たりの摩擦力 q が接触面の動径方向と垂直に作用すると考えられるので、2 球間の捩れに対する抵抗モーメントは摩擦力と同様に

$$M_z = \iint r q 2\pi r dr \quad (2.79)$$

で求められる。 q として式 (2.45)(2.48)(2.62) を用い、さらに JKR 理論に基づく接触面圧力分布 (式 (2.68)) を用いて、以下にそれぞれの摩擦力に対応する捩れの抵抗モーメント (トルク) を導出する。

2.5.1 Maximum torque for alined idential grids twist

$$\begin{aligned} M_z^{\max} &= \int_0^a r q^{\max} 2\pi r dr \\ &= 2\pi \int_0^a r^2 (\mu^{\max} p(r, a) + \mu_0^{\max}) dr \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$= \pi \mu^{\max} F_c a_0 \left(\frac{3}{4} \hat{a}^4 - \hat{a}^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{2}{3} \pi a^3 \mu_0^{\max} \quad (2.81)$$

2.5.2 Average torque for unaligned grids twist

$$\begin{aligned} M_z^{\text{slide,io}} &= \int_0^{r_c} r q^{\text{slide,io}} 2\pi r dr \\ &= 2\pi \int_0^{r_c} r^2 (\mu^{\text{slide,io}} p(r, a) + \mu_0^{\text{slide,io}}) dr \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} &= 2\mu^{\text{slide,io}} F_c a_0 \left\{ \left(\frac{3}{4} \hat{a}^4 - \hat{a}^{\frac{5}{2}} \right) \arcsin \frac{r_c}{a} + \left(\frac{3}{2} \hat{a} r_c^3 - \frac{3}{4} \hat{a}^3 r_c + \hat{a}^{\frac{3}{2}} r_c \right) \left(1 - \frac{r_c^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{3} \pi r_c^3 \mu_0^{\text{slide,io}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ここで、 $\hat{r}_c \equiv \frac{r_c}{a_0}$ とした。

また、 $r_c \rightarrow a$ とすると、

$$M_z^{\text{slide,io}} = \pi \mu^{\text{slide,io}} F_c a_0 \left(\frac{3}{4} \hat{a}^4 - \hat{a}^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{2}{3} \pi a^3 \mu_0^{\text{slide,io}} \quad (2.84)$$

2.5.3 Torque due to surface steps

$$M_z^{\text{slide,steps}} = \int_0^a r \mu_0^{\text{slide,steps}} 2\pi r dr = \frac{G a^3}{3\pi} \quad (2.85)$$

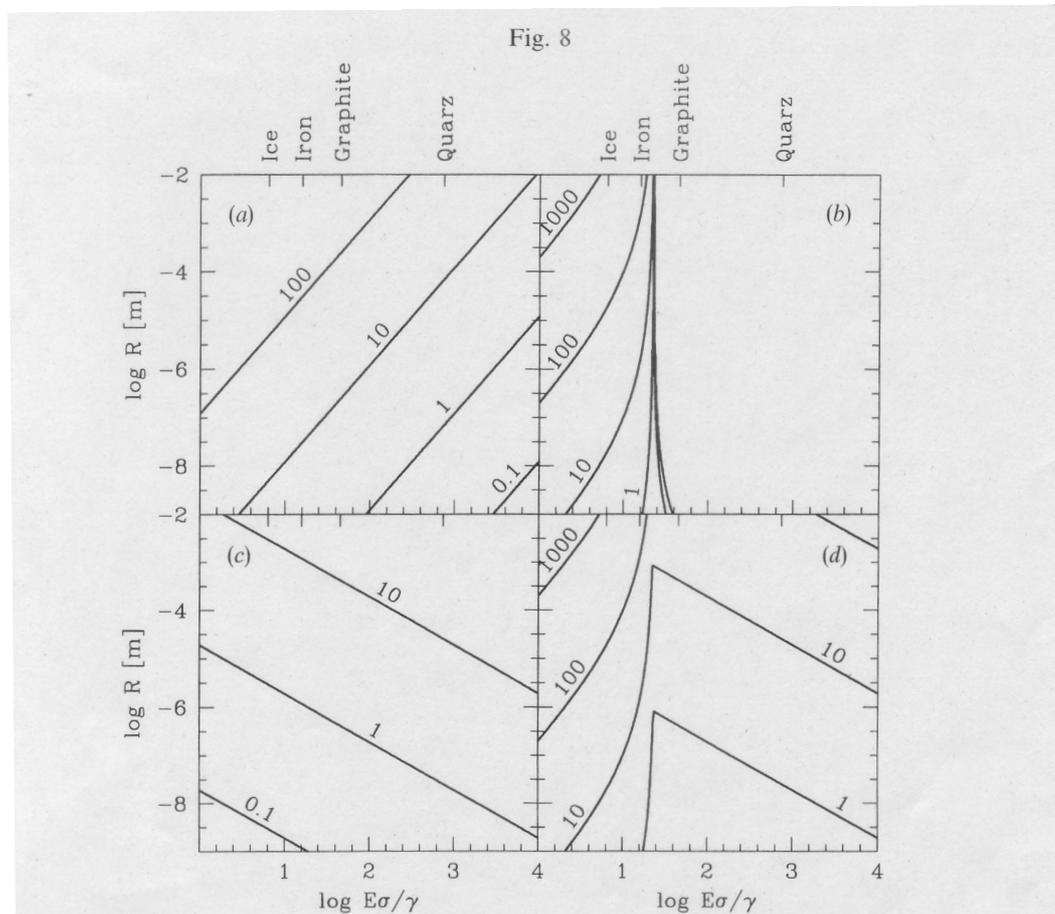
2.6 摩擦力と法線方向引張力との比較

これまでに求められた2球間の摩擦力 Q_x^{\max} (式(2.72))、 $Q_x^{\text{slide,io}}$ (式(2.73))、 $Q_x^{\text{slide,steps}}$ (式(2.78)) と法線方向引張力 F_c (式(2.65)) の比をとり、それらの大きさを比較する。とくに物性の違いによる影響を見るために、各摩擦力は $F = 0$ (即ち $a = a_0$) の場合で考えることにする。

R と $\frac{E\sigma}{\gamma}$ をパラメータとして

$$\frac{Q_x^{\max}}{F_c}, \quad \frac{Q_x^{\text{slide,io}}}{F_c}, \quad \frac{Q_x^{\text{slide,steps}}}{F_c}, \quad \frac{Q_x^{\text{slide,io}} + Q_x^{\text{slide,steps}}}{F_c}$$

をそれぞれプロットしたものが図 16。



Resistance to sliding at zero applied load, as derived for the different processes discussed in the text. The lines in all plots are lines of constant force. Forces are normalized to the pull-off force P_c . (a) Maximum force for aligned identical grids, with all atoms in phase. (b) Minimum force, as derived for *independent* oscillators. (c) Friction force resulting from repeated flattening of steps inside the contact area. (d) Sum of (b) and (c), which is the friction force acting over most of the surface.

図 16: Dominik and Tielens (1996) の Fig.8 より。ただし、図 (c) の縦軸の R の単位は [cm] であることに注意。従って、図 (d) の右側領域も R の単位は [cm]。本文中の近似式を用いて R の単位を [m] で描きなおしたものが図 17

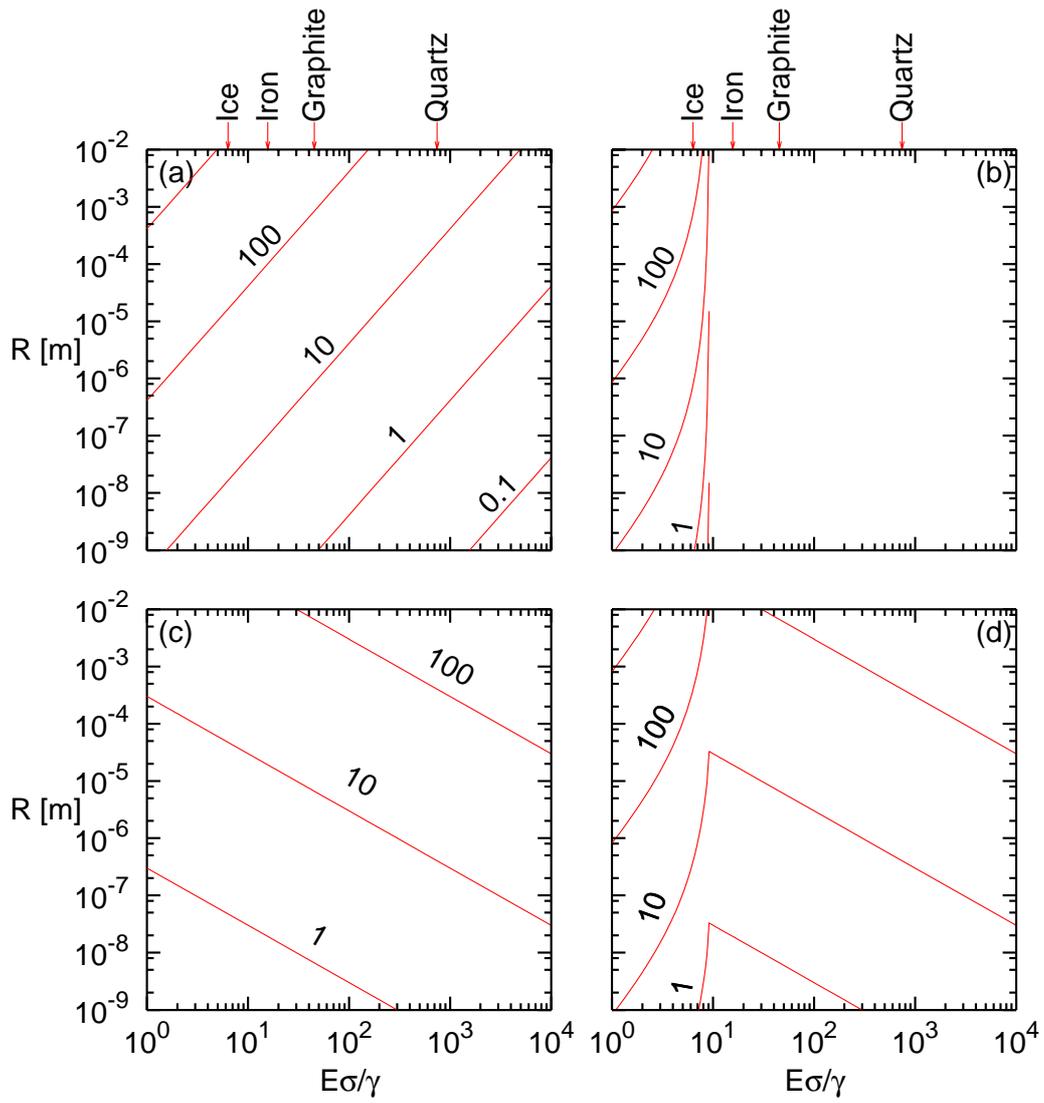


図 17: 図 16 と同様の図。ただし、 $\sigma = 3 \times 10^{-10}$ m として近似式を用いて計算。(a): $Q_x^{\max}/F_c = 9 \left(\frac{E\sigma}{\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$. (b): $Q_x^{\text{slide,io}}/F_c = 0.32 \left(24.72 - 2.67 \frac{E\sigma}{\gamma}\right) \left(\frac{E\sigma}{\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$. (c): $Q_x^{\text{slide,steps}}/F_c = 0.1 \left(\frac{E\sigma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$. (d): $(Q_x^{\text{slide,io}} + Q_x^{\text{slide,steps}})/F_c$.

もともと摩擦に関する無次元パラメーターは、 \hat{f}_z と \hat{c}_h であり、いま $\hat{f}_z = 0$ とするので \hat{c}_h のみがパラメーターとなる。式 (2.44) より

$$\hat{c}_h \sim \frac{E\sigma}{\gamma} \quad (2.86)$$

であるから、球のサイズの効果も考えて、結局 $\frac{E\sigma}{\gamma}$ と R をパラメーターとして図 16 はプロットされている。

$\frac{E\sigma}{\gamma} (\sim \frac{1/2(E\sigma)\sigma^2}{\pi\sigma^2\gamma})$ は、硬さと付着度の目安を示すものであり、この値が「大きい」と物質は「硬い」and/or「付着しにくい」、ということの意味する。図 16 に示すように、この値は物質によって大きく異なる。以下、各値について詳しく見ていく。

- Q_x^{\max}/F_c (図の (a))

$$\begin{aligned} \frac{Q_x^{\max}(F=0)}{F_c} &= \frac{\pi a_0^2 \mu_0^{\max}}{F_c} = \frac{\pi a_0^2 \frac{3\beta_2}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma}{3\pi\gamma R} = \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\beta_2 b^4}{\pi R \sigma^5} \\ &\approx 9 \left(\frac{E^*\sigma}{\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\leftrightarrow b/\sigma \approx 1) \end{aligned} \quad (2.87)$$

これをプロットしたものが図 16(a)。ほとんどの場合で $Q_x^{\max} \gg F_c$ 。とくに、 R 大・ $\frac{E\sigma}{\gamma}$ 小、すなわち、

$$\text{大きくて、軟らかい and/or 付着力大} \implies Q_x^{\max} \gg F_c$$

となり、最大摩擦がかかるときには球が剥がれてしまい、滑りによる移動はないと考えられる。

ただし、

$$\text{大変小さく、硬い and/or 付着力小} \implies Q_x^{\max} \approx F_c$$

であり、例えば 100Å の quartz に対しては、接触を保持したまま滑りによる移動が可能であると考えられる。

- $Q_x^{\text{slide,io}}/F_c$ (図の (b))

平均的摩擦 $Q_x^{\text{slide,io}}$ が働くか働かないかの境界が、

$$\frac{E\sigma}{\gamma} \approx 10^{1.4} \approx 25 \quad (2.88)$$

にある。この境界の値は、以下のように説明される：

式 (2.21) から、 $\hat{f}_z = 0$ のとき、 $\hat{f}_x^{\text{slide,io}}$ が 0 になるかどうかの境は $\hat{c}_{\text{crit}} \approx 10$ で与えられる ($\hat{c}_h > \hat{c}_{\text{crit}}$ のとき摩擦力は 0)、 $\hat{c}_h \approx \frac{E\sigma}{\gamma}$ だから、

$$\left(\frac{E\sigma}{\gamma}\right)_{\text{crit}} = \left(\frac{2(1+\nu)G\sigma}{\gamma}\right)_{\text{crit}} \approx 2.5\hat{c}_{\text{crit}} \approx 25 \approx 10^{1.4} \quad (2.89)$$

従って、 $\frac{E\sigma}{\gamma} \gtrsim 10^{1.4}$ のとき、 $Q_x^{\text{slide,io}} = 0$ 。

$\frac{E\sigma}{\gamma} \lesssim 10^{1.4}$ のときは、 $r_c \rightarrow a_0$ の近似式 (2.76) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{Q_x^{\text{slide,io}}(F=0)}{F_c} &= \frac{\pi a_0^2 \mu_0^{\text{slide,io}}}{F_c} = \frac{\pi \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \times (-0.33 p_{\text{crit}})}{3\pi\gamma R} \\ &= \frac{\pi \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \times (-0.33 \left(\frac{2.67}{\pi} G - \frac{24.72}{\pi} \frac{\gamma}{\sigma}\right))}{3\pi\gamma R} \\ &\approx 0.32 \left(24.72 - 2.67 \frac{G\sigma}{\gamma}\right) \left(\frac{E^*\sigma}{\gamma}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (2.90)$$

これが図 16(b) の左側の領域 ($\frac{E\sigma}{\gamma} \lesssim 10^{1.4}$)。この領域ではほとんど $Q_x^{\text{slide,io}} \gg F_c$ 。すなわち

$$\text{軟らかい and/or 付着力大} \Rightarrow Q_x^{\text{slide,io}} \gg F_c$$

で、Ice や Iron は、摩擦係数 $Q_x^{\text{slide,io}}$ のもとでは滑りによる移動はないと考えられる。

- $Q_x^{\text{slide,steps}}/F_c$ (図の (c))

$$\begin{aligned} \frac{Q_x^{\text{slide,steps}}(F=0)}{F_c} &= \frac{Ga_0^2}{2\pi} \frac{1}{3\pi\gamma R} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{G}{\gamma} \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R} \\ &\approx 0.1 \left(\frac{E\sigma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

これをプロットしたものが図 16(c)。 $Q_x^{\text{slide,steps}}$ と F_c は結構同程度。

$$\text{小さい} \Rightarrow Q_x^{\text{slide,steps}} \lesssim F_c$$

$$\text{大きい} (> 1\mu\text{m}) \Rightarrow Q_x^{\text{slide,steps}} > F_c$$

サイズが小さいと $Q_x^{\text{slide,steps}}$ が小さくなるのは、「段差」数が少なくなるから。

- $(Q_x^{\text{slide,io}} + Q_x^{\text{slide,steps}})/F_c$ (図の (d))

$$* \frac{E\sigma}{\gamma} < 10^{1.4} \text{ (i.e., 軟らかい and/or 付着力大 : Ice, Iron)}$$

$$\Rightarrow Q_x^{\text{slide}} \gg F_c$$

\therefore aggregate 中の滑り移動は難しい。

$$* \frac{E\sigma}{\gamma} > 10^{1.4} \text{ (i.e., 硬い and/or 付着力小 : Quartz, Graphite)}$$

$$R < 0.1\mu\text{m} \Rightarrow Q_x^{\text{slide}} \lesssim F_c$$

\therefore 小さい粒子であれば、aggregate 中の滑りによる構造変化可能。

同様に、各擦れの抵抗モーメントを $F_c a_0$ で規格化したものを表示したものが図 18。擦れも滑りと同じ素過程によっているので、滑り摩擦と同様の傾向を示している。

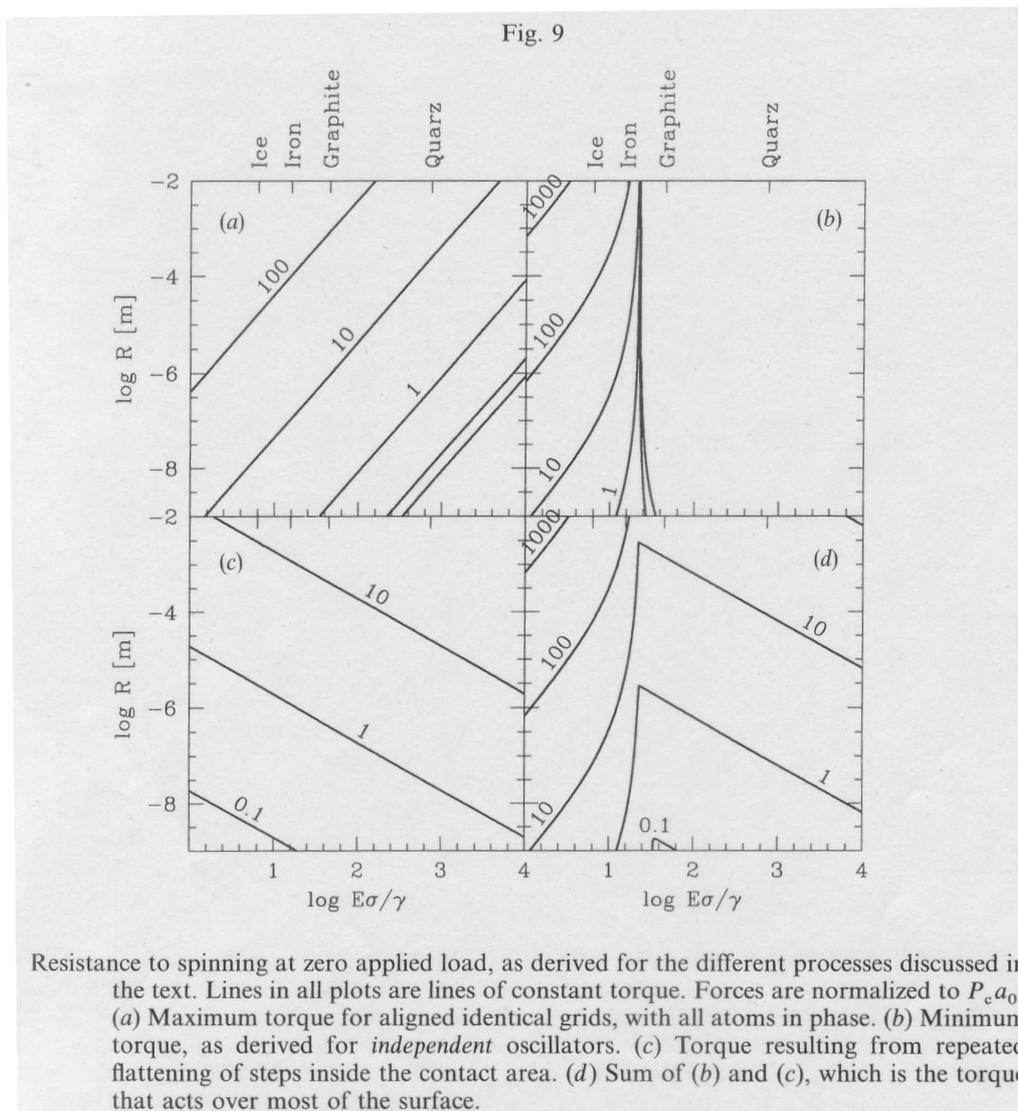


図 18: Dominik and Tielens (1996) の Fig.9 より。ただし、図 (c) の縦軸の R の単位は [cm] であることに注意。従って、図 (d) の右側領域も R の単位は [cm]。

2.7 接線衝突の際の滑り運動の可能性

固定球に、別の球が運動エネルギー W_0 で接線衝突することを考える (図 19)。衝突した球が、固定球と接触を保ちながら滑り運動のみで移動することを考えると、

$$W_0 \sim F_c \delta_0 \quad (2.92)$$

$$Q_x^{\text{fric}} = Q_x^{\text{slide,io}} + Q_x^{\text{slide,steps}} \quad (2.93)$$

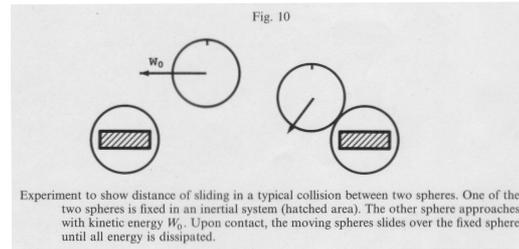


図 19: Dominik and Tielens (1996) の Fig.10 より

(W_0 は、くっつくエネルギー E_{stick} と同程度とした。)

滑りによる摩擦でエネルギー W_0 がすべて散逸するとすると、滑り距離は

$$S_{\text{slide}} = \frac{W_0}{Q_x^{\text{fric}}} \quad (2.94)$$

$S_{\text{slide}}/2\pi R_1$ をプロットしたのが、図 20。

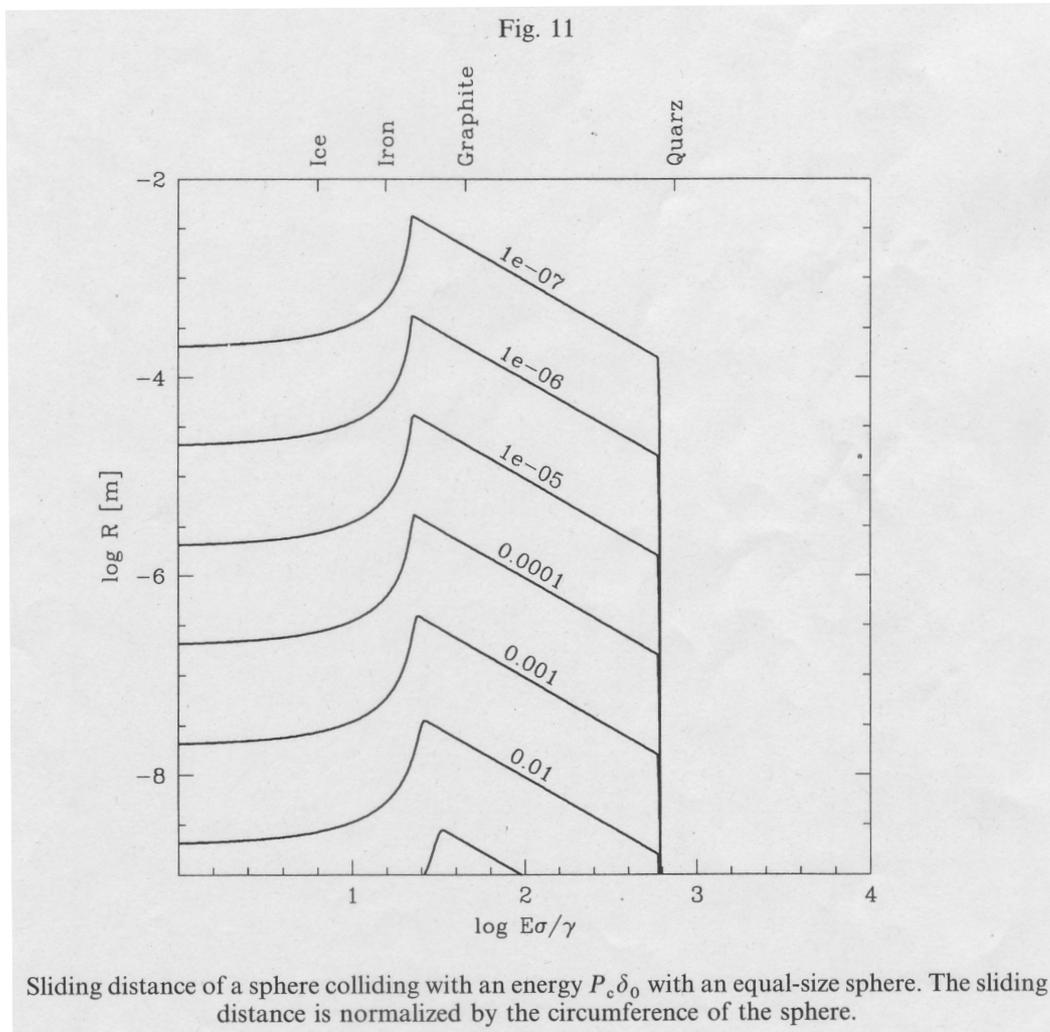


図 20: Dominik and Tielens (1996) の Fig.11 より

結果は、ほとんど滑らないことを示唆。 $\frac{E\sigma}{\gamma} \gtrsim 10^{2.8}$ では、 $S_{\text{slide}} < b$ となり、実質滑らない。これは摩擦力が小さくても、 W_0 が小さくて滑らせるのに十分なエネルギーがないからである。ただし、大きなアグリゲイトの衝突の際には、十分なエネルギーが考えられるので、滑りがアグリゲイトのコンパクションに寄与するかもしれない。

3 滑り面が十分固着している時の弾性論的接線方向作用力

付着力、あるいは摩擦力が十分強く、相互の接触面が滑らない状態を仮定する。この状態でシア応力をかけた場合に生じる接線方向の変位量（3.2節）、および捩れに対するトルク（3.3節）を求める。導出は Johnson (1987) を参考に進めていくことにする。

半無限体表面上の点シアによる応答から出発し、その重ね合わせとして円領域内（球同士の接触を考えるので、接触面は円を考える）のシア応力分布に対する変位を求めていくことになる。

3.1 半無限体表面での Point tangential traction

ヤング率 E 、ポアソン比 μ の半無限弾性体の自由表面に xy 平面を設定し、下向き（内部向き）に z 軸を設定する。原点に、自由表面に沿って集中力 Q_x を x 軸正の向きに付ける（接線方向力：シア）。せん断弾性係数（shear modulus） G とヤング率 E との関係は

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.1)$$

このとき、半無限体体内の点 (x, y, z) における変位および応力分布は以下のように与えられる（参照：Johnson, 1989; Landau and Lifshitz, 1986）。 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} Q_x \left[\frac{1}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^3} + (1-2\nu) \left\{ \frac{1}{\rho+z} - \frac{x^2}{\rho(\rho+z)^2} \right\} \right] \quad (3.2)$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} Q_x \left[\frac{xy}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{xy}{\rho(\rho+z)^2} \right] \quad (3.3)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} Q_x \left[\frac{xz}{\rho^3} + (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{2\pi\sigma_x}{Q_x} = -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ \frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \quad (3.5)$$

$$\frac{2\pi\sigma_y}{Q_x} = -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ \frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \quad (3.6)$$

$$\frac{2\pi\sigma_z}{Q_x} = -\frac{3xz^2}{\rho^5} \quad (3.7)$$

$$\frac{2\pi\tau_{xy}}{Q_x} = -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ -\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \quad (3.8)$$

$$\frac{2\pi\tau_{yz}}{Q_x} = -\frac{3xyz}{\rho^5} \quad (3.9)$$

$$\frac{2\pi\tau_{zx}}{Q_x} = -\frac{3x^2z}{\rho^5} \quad (3.10)$$

$$\frac{2\pi}{Q_x} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -2 \frac{(1+\nu)x}{\rho^3} \quad (3.11)$$

(応力は、圧縮だと $-$ 、引張だと $+$ 。)

表面 ($z=0$) においては、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として変位は

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2\pi G} Q_x \left(\frac{1-\nu}{r} + \nu \frac{x^2}{r^3} \right) \quad (3.12)$$

$$\bar{u}_y = \frac{1}{2\pi G} Q_x \nu \frac{xy}{r^3} \quad (3.13)$$

$$\bar{u}_z = \frac{1}{4\pi G} Q_x (1-2\nu) \frac{x}{r^2} \quad (3.14)$$

また応力は

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{Q_x}{\pi} \left\{ (1-2\nu) \frac{x}{r^3} + \nu \frac{3x^3}{r^5} \right\} \quad (3.15)$$

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{Q_x}{\pi} \nu \frac{3xy^2}{r^5} \quad (3.16)$$

$$\bar{\sigma}_z = 0 \quad (3.17)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{Q_x}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \frac{y}{r^3} + 2\nu \frac{3x^2y}{r^5} \right\} \quad (3.18)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zx} = 0 \quad (3.19)$$

3.2 円領域面に一方向接線変位を引き起こす接線方向作用力

半無限弾性体表面の $r \leq 0$ の円領域 S 内に接線方向作用力 $q_x(x, y)$ をかけることを考える。ここでは方向が x 軸の正の方向で、大きさが

$$q_x(r) = q_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

という分布を考える。結果として、表面において力と平行な方向 (x 方向) の変位 \bar{u}_x は円領域内の場所によらず一定で、力と垂直な方向 (y 方向) の変位 \bar{u}_y は 0 となる。では、具体的に計算してみよう。

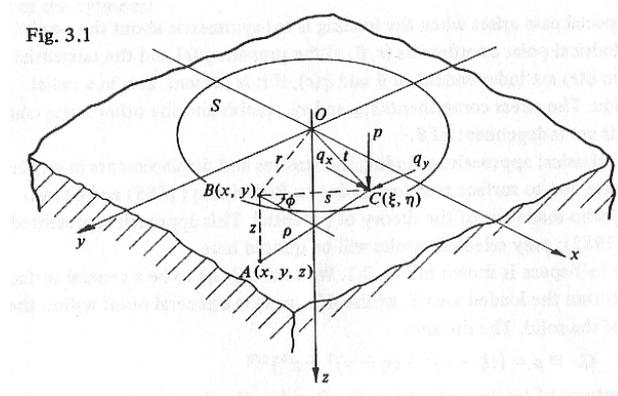


図 21: Johnson(1987) の Fig.3.1 より

表面上の点 $B(x, y)$ における変位は、領域内の点 $C(\xi, \eta)$ にかかる接線方向作用力 $q_x(\xi, \eta)$ がつく

る変位を重ね合わせて得られる。したがって、式 (3.12),(3.13),(3.14) から

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \iint_S q_x(\xi, \eta) \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(\xi-x)^2}{s^3} \right\} d\xi d\eta \quad (3.21)$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S q_x(\xi, \eta) \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{s^3} d\xi d\eta \quad (3.22)$$

$$\bar{u}_z(x, y) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \iint_S q_x(\xi, \eta) \frac{\xi-x}{s^2} d\xi d\eta \quad (3.23)$$

(ここで $s = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$ とした。また、 $\vec{CB} = (x-\xi, y-\eta)$ だから、各式 (3.12),(3.13),(3.14) において x, y をそれぞれ $x-\xi, y-\eta$ に置き換えればよい。さらに Q_x を $q_x d\xi d\eta$ として積分する形にすれば上の各式が得られる。)

B からみた C の偏角を ϕ とすると、

$$\xi = x + s \cos \phi, \quad \eta = y + s \sin \phi. \quad (3.24)$$

$t \equiv |\vec{OC}|$ とすると

$$\begin{aligned} t^2 &= \xi^2 + \eta^2 = (x + s \cos \phi)^2 + (y + s \sin \phi)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2s(x \cos \phi + y \sin \phi) + s^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで $\alpha^2 \equiv a^2 - r^2$, $\beta \equiv x \cos \phi + y \sin \phi$ とおくと、

$$q_x(\xi, \eta) = q_x(s, \phi) = q_0 a (\alpha^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

$$= q_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

これらを各式 (3.21)(3.22)(3.23) に代入して ($d\xi d\eta = s ds d\phi$ に注意する)

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \int_0^{s_1} q_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \{(1-\nu) + \nu \cos^2 \phi\} ds d\phi \quad (3.28)$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{\nu}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \int_0^{s_1} q_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \phi \cos \phi ds d\phi \quad (3.29)$$

$$\bar{u}_z(x, y) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \int_0^{s_1} q_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \phi ds d\phi \quad (3.30)$$

ただし、 s_1 は点 B から B を通る弦と円の交点までの距離であり、 $t = a$ となる時の s 即ち $\alpha^2 - 2\beta s - s^2 = 0$ の正の実数解である：

$$s_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \quad (3.31)$$

まず、 s についての積分を行う。積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{|a|} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (a < 0) \quad (3.32)$$

を用いると、 s に関する積分は以下のように計算される：

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left[-\arcsin \left(\frac{-s - \beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \right) \right]_0^{s_1} = -\arcsin(-1) + \arcsin \left(\frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

ところで、 $\beta(\phi+\pi) = -\beta(\phi)$ だから $\arctan\left(\frac{\beta(\phi+\pi)}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)$ となり、 $\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)$, $\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)\cos^2\phi$, $\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)\sin 2\phi$ の ϕ に関する区間 $[0, 2\pi]$ の積分はそれぞれ 0 となる。これを用いて ϕ についての積分を行う。

まず、式 (3.28) から \bar{u}_x は、

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= \frac{q_0 a}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \{(1-\nu) + \nu \cos^2 \phi\} d\phi \\ &= \frac{q_0 a}{4G} \int_0^{2\pi} \{(1-\nu) + \nu \cos^2 \phi\} d\phi \\ &= \frac{\pi(2-\nu)}{4G} q_0 a\end{aligned}\quad (3.34)$$

次に、式 (3.29) から \bar{u}_y は、

$$\begin{aligned}\bar{u}_y &= \frac{\nu q_0 a}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= 0\end{aligned}\quad (3.35)$$

また、式 (3.30) から \bar{u}_z は、

$$\begin{aligned}\bar{u}_z &= -\frac{(1-2\nu)q_0 a}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{(1-2\nu)q_0 a}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \phi d\phi\end{aligned}\quad (3.36)$$

$$= \frac{(1-2\nu)q_0 a}{2G} \left(\frac{a}{r} - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right) \frac{x}{r}\quad (3.37)$$

$$= \frac{(1-2\nu)}{2G} q_0 \frac{x}{1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}\quad (3.38)$$

($\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \phi d\phi$ の計算過程は補遺参照。)

- \bar{u}_x は円領域内、どこでも一定。また $\bar{u}_y = 0$ 。したがって、円領域は、「一様に力の方向 (x 方向) に変位する」。
- ただし、垂直変位は、 $\bar{u}_z \neq 0$ でしかも場所ごとに違う値をとるので、「面に固着した円柱パンチによる接線方向の変位」とは必ずしも言えず、 z 方向の変位を一様にするためにはさらに別のトラクションをかける必要がある。

全接線方向作用力 F_x は、

$$F_x = \int_0^a 2\pi r dr q_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\pi a^2 q_0 \iff q_0 = \frac{F_x}{2\pi a^2}\quad (3.39)$$

式 (3.34)(3.39) から q_0 を消去して

$$\bar{u}_x = \frac{2-\nu}{8Ga} F_x\quad (3.40)$$

2 球の接触面における各々の変位量を $\bar{u}_{x,1}, \bar{u}_{x,2}$ 、相対変位量を δ_x とすると、

$$\delta_x = \bar{u}_{x,1} + \bar{u}_{x,2} = \left\{ \frac{2-\nu_1}{8G_1a} + \frac{2-\nu_2}{8G_2a} \right\} F_x \quad (3.41)$$

$\frac{1}{G^*} \equiv \frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2}$ とすると、

$$\delta_x = \frac{1}{8aG^*} F_x \quad (3.42)$$

3.3 捩れを引き起こすモーメント

半無限弾性体表面の $r \leq 0$ の円領域 S 内に方位角方向（動径方向と垂直な方向）に接線方向作用力をかけることを考える。すなわち、 $e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ とし領域内の点 $C(\xi, \eta) = (t \cos\theta, t \sin\theta)$ における作用力を

$$\mathbf{q} = q(t)\mathbf{e}_\theta \quad (3.43)$$

で与える。ここで、 $t = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ とした。この作用力の大きさ $q(t)$ は、中心からの距離のみの関数で、ここでは以下のようなもの考える：

$$q(r) = q_0 \frac{r}{a} = q_0 r (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (r \leq a) \quad (3.44)$$

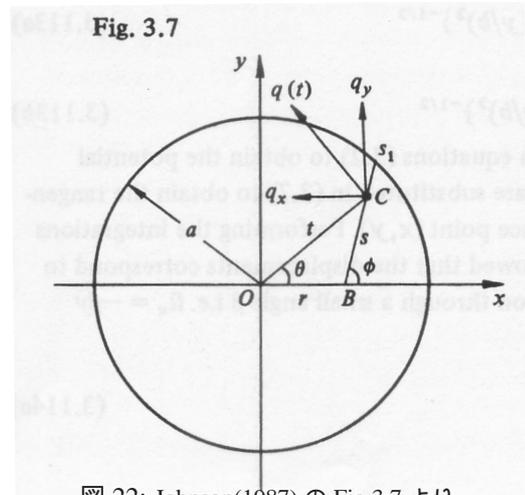
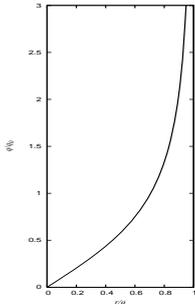


図 22: Johnson(1987) の Fig.3.7 より

結果として、表面の変位は z 軸を中心に様に回転する変位となる。以下、計算過程を具体的に示す。

まず、表面 ($z = 0$) における領域内の任意の点 $B(x, y)$ での変位は、点 $C(\xi, \eta)$ にかかるシア応力 $(q_x(\xi, \eta), q_y(\xi, \eta))$ がつくる変位を重ねあわせて (式 (3.21)(3.22)(3.23) が q_x に対する式なので、 q_y についても同様に考えればよい。)

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \iint_S \left[q_x(\xi, \eta) \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(\xi-x)^2}{s^3} \right\} + q_y(\xi, \eta) \nu \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{s^3} \right] d\xi d\eta \quad (3.45)$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \iint_S \left[q_x(\xi, \eta) \nu \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{s^3} + q_y(\xi, \eta) \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(\eta-y)^2}{s^3} \right\} \right] d\xi d\eta \quad (3.46)$$

$$\bar{u}_z(x, y) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \iint_S \left[q_x(\xi, \eta) \frac{\xi-x}{s^2} + q_y(\xi, \eta) \frac{\eta-y}{s^2} \right] d\xi d\eta \quad (3.47)$$

$$(s = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2})$$

いま、 $q_x(\xi, \eta), q_y(\xi, \eta)$ は、式 (3.43) から

$$q_x(\xi, \eta) = -\frac{q(t)}{t}\eta, \quad q_y(\xi, \eta) = \frac{q(t)}{t}\xi \quad (3.48)$$

とあたえられるので、各式 (3.45)(3.46)(3.47) に代入して

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \left\{ -\eta \frac{1-\nu}{s} - \eta \nu \frac{(\xi-x)^2}{s^3} + \xi \nu \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{s^3} \right\} d\xi d\eta \quad (3.49)$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \left\{ -\eta \nu \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{s^3} + \xi \frac{1-\nu}{s} + \xi \nu \frac{(\eta-y)^2}{s^3} \right\} d\xi d\eta \quad (3.50)$$

$$\bar{u}_z(x, y) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \left\{ -\eta \frac{\xi-x}{s^2} + \xi \frac{\eta-y}{s^2} \right\} d\xi d\eta \quad (3.51)$$

• \bar{u}_z の計算。式 (3.51) から

$$\bar{u}_z = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \frac{x\eta - y\xi}{s^2} d\xi d\eta \quad (3.52)$$

ここで、 $B(x, y)$ の偏角を ψ として

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \\ y = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = t \cos \theta \\ \eta = t \sin \theta \end{cases} \quad (3.53)$$

を代入すると ($d\xi d\eta = t dt d\theta$)、

$$\begin{aligned} \bar{u}_z &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \int_0^a dt \int_0^{2\pi} d\theta q(t) \frac{rt \sin(\theta - \psi)}{t^2 + r^2 - 2rt \cos(\theta - \psi)} \\ &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi G} \int_0^a dt q(t) \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + r^2 - 2rt \cos(\theta - \psi)) \right]_{\theta=0}^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

• \bar{u}_x の計算。式 (3.49) から ($s = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$ に注意して)

$$\bar{u}_x(x, y) = -\frac{1}{2\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \frac{\eta}{s} d\xi d\eta + \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{ts^3} (\eta-y) \{ \eta(\eta-y) + \xi(\xi-x) \} d\xi d\eta \quad (3.55)$$

この右辺第 2 項の積分部分を I とおく。 $B(x, y)$ から見た $C(\xi, \eta)$ の極座標 (s, ϕ) を用いると

$$\begin{cases} \xi = x + t \cos \phi \\ \eta = y + t \sin \phi \end{cases} \quad (3.56)$$

これを代入して ($d\xi d\eta = s ds d\phi$)

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{q(t)}{ts^3} s \sin \phi \{ (y + s \sin \phi) s \sin \phi + (x + s \cos \phi) s \cos \phi \} s ds d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{s_1} \frac{q(t)}{t} \sin \phi (s + x \cos \phi + y \sin \phi) ds d\phi \end{aligned} \quad (3.57)$$

ここで、 $t = \sqrt{(x + s \cos \phi)^2 + (y + s \sin \phi)^2}$ で、 s_1 は $t^2 = a^2$ の正の実数解、即ち

$$s_1 = -(x \cos \phi + y \sin \phi) + \sqrt{(x \cos \phi + y \sin \phi)^2 + a^2 - r^2}. \quad (3.58)$$

さらに、 $q(t)$ の式 (3.44)

$$q(t) = q_0 t (a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = q_0 t (a^2 - r^2 - 2(x \cos \phi + y \sin \phi)s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} I &= q_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_1} ds (a^2 - r^2 - 2(x \cos \phi + y \sin \phi)s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \phi (s + x \cos \phi + y \sin \phi) \\ &= q_0 \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \left[-\sqrt{a^2 - r^2 - 2(x \cos \phi + y \sin \phi)s - s^2} \right]_{s=0}^{s_1} \\ &= q_0 \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{a^2 - r^2} \sin \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

したがって、式 (3.55) の \bar{u}_x は

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(x, y) &= -\frac{1}{2\pi G} \iint_S \frac{q(t)}{t} \frac{\eta}{s} d\xi d\eta \\ &= -\frac{q_0}{2\pi G} \iint_S (a^2 - r^2 - 2(x \cos \phi + y \sin \phi)s - s^2)^{-\frac{1}{2}} (y + s \sin \phi) ds d\phi \\ &= -\frac{q_0}{2\pi G} \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ y \int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \sin \phi \int_0^{s_1} ds s (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

ここで、 $\alpha^2 \equiv a^2 - r^2$, $\beta \equiv x \cos \phi + y \sin \phi$ とした。

さて、前出の積分公式 (3.32) および次の積分公式

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3.62)$$

を用いると、

$$\int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (3.63)$$

$$\int_0^{s_1} ds s (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} = \alpha - \beta \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \quad (3.64)$$

となるので、式 (3.61) に代入して \bar{u}_x は、

$$\bar{u}_x = -\frac{q_0}{2\pi G} \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ (y - \beta \sin \phi) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right) + \alpha \sin \phi \right\} \quad (3.65)$$

ここで

$$\begin{aligned} y - \beta \sin \phi &= y - (x \cos \phi + y \sin \phi) \sin \phi = y(1 - \sin^2 \phi) - x \sin \phi \cos \phi \\ &= y \cos^2 \phi - \frac{x}{2} \sin 2\phi \end{aligned} \quad (3.66)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= -\frac{q_0}{2\pi G} \left\{ y \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right) d\phi - \frac{x}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right) d\phi \right. \\ &\quad \left. + \alpha \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \right\} \\ &= -\frac{q_0 y}{4G} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\ &= -\frac{\pi q_0}{4G} y = -\frac{\pi q_0}{4G} r \sin \psi. \end{aligned} \quad (3.67)$$

- \bar{u}_y の計算。対称性を考慮すると、上で求めた \bar{u}_x から

$$\bar{u}_y = \frac{\pi q_0}{4G} x = \frac{\pi q_0}{4G} r \cos \psi. \quad (3.68)$$

以上から、変位を円柱座標形式で書けば、

$$\bar{u}_\theta = (\bar{u}_x, \bar{u}_y) \cdot (-\sin \psi, \cos \psi) = \frac{\pi q_0}{4G} r \quad (3.69)$$

$$\bar{u}_r = (\bar{u}_x, \bar{u}_y) \cdot (\cos \psi, \sin \psi) = 0 \quad (3.70)$$

$$\bar{u}_z = 0 \quad (3.71)$$

- $\bar{u}_\theta \propto r$ なので、 $r \leq a$ の円領域は原点を中心に角度

$$\delta_{\alpha z} = \frac{\pi q_0}{4G} \quad (3.72)$$

だけ剛体回転していることになる。

全体での Twisting moment は、 $q(r)$ の式 (3.44) を用いて

$$M_z = \int_0^a r q(r) 2\pi r dr = 2\pi q_0 \int_0^a r^3 (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (3.73)$$

$$= \frac{4}{3} \pi q_0 a^3 \quad (3.74)$$

これと、式 (3.72) から q_0 を消去して

$$M_z = \frac{16}{3} G a^3 \delta_{\alpha z} \iff \delta_{\alpha z} = \frac{3}{16 G a^3} M_z \quad (3.75)$$

2 球の接触に際しては、 $\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$ によって G を与えればよい。

4 Dominik and Tielens (1997)における「滑り」と「擦れ」の扱い

Dominik and Tielens (1997) では、これまで求めてきた摩擦力や擦れモーメントを用いて、滑りと擦れの振る舞いを解析している。これを以下で簡単にまとめておく。

端的な考え方は以下のとおり。滑らせる力や擦れのトルクが徐々に加わっていくと...

初めは弾的に振舞う（第3節）、（静止摩擦を表現？）

↓

力やトルクが第2節で求めた値に達したら、不可逆的に動き出す。

↓

第2節で求めた力やトルクが摩擦力や擦れ抵抗となる。（動摩擦を表現？）

滑りについて

接線方向力が十分小さいうちは摩擦力 F_x は接線方向変位 δ_x に比例した形（式 (3.42)）で与えられる：

$$F_x = -8aG^*\delta_x \quad (4.1)$$

つまり、変位に対してバネのように振舞う。 F_x が、次に示す滑り摩擦力 F_{fric} に達すると、今度は摩擦力として F_{fric} が作用する。 F_{fric} は、原子スケールの段差による摩擦力（式 (2.78)）と物質表面の原子間相互作用による「平均的」摩擦力（式 (2.76)）とに基づいて、以下のように与える：

$$F_{\text{fric}} = \frac{Ga^2}{2\pi} + \begin{cases} 0 & (\text{for silicate, graphite, etc...}) \\ \frac{1}{3}F - \frac{\pi a^2}{3}p_{\text{crit}} & (\text{for ice, metal}) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\text{where, } p_{\text{crit}} = \frac{2.67}{\pi} \frac{b^3}{\sigma^3} G - \frac{24.72}{\pi} \frac{b^4}{\sigma^5} \gamma \quad (4.3)$$

ここで、 F は法線方向の力。なお、平均摩擦力（式 (2.76)）は $r_c \rightarrow a$ とした極限の式なので、多少過大評価。

$F_x = F_{\text{fric}}$ となる時の変位を δ_x^c とすると、silicate や graphite の場合で

$$\delta_x^c = \frac{2-\nu}{16\pi} a \approx 0.03a \quad (4.4)$$

変位が δ_x^c を越えると実質的な滑りが生じると考える。その際散逸されるエネルギー（=滑り始めるのに必要な最低エネルギー）は、

$$e_{\text{slide}} = \frac{1}{2} \delta_x^c F_{\text{fric}} = \frac{1}{16aG^*} F_{\text{fric}}^2 = 4aG^* \delta_x^{c2} \quad (4.5)$$

また、十分な距離 (πR) 滑るために必要なエネルギーは、

$$E_{\text{slide}} = e_{\text{slide}} \frac{\pi R}{\delta_x^c} = \frac{1}{2} \pi R F_{\text{fric}} = 4\pi R a G^* \delta_x^c \quad (4.6)$$

捩れについて

捩れのトルクが十分小さいうちは、抵抗モーメント M_z は捩れ角 δ_{az} に比例した形(式(3.75))で与えられる:

$$M_z = -\frac{16}{3}Ga^3\delta_{az}. \quad (4.7)$$

これもやはり捩れに対してバネのように振舞う。 M_z が、次に示す捩れ抵抗モーメント M_z^{slide} に達すると、今度は抵抗モーメントとして M_z^{slide} が作用する。 M_z^{slide} は、原子スケールの段差によるもの(式(2.85))と物質表面の原子間相互作用によるもの(式(2.84))とに基づいて、以下のように与える:

$$M_z^{\text{slide}} = \frac{Ga^3}{3\pi} + \begin{cases} 0 & \text{(for silicate, graphite, etc...)} \\ \frac{1}{3}F_c a_0 \left(\frac{3}{4}\hat{a}^4 - \hat{a}^{\frac{5}{2}} \right) - \frac{2}{9}\pi a^3 p_{\text{crit}} & \text{(for ice, metal)} \end{cases} \quad (4.8)$$

なお、平均的モーメント(式(2.84))はやはり $r_c \rightarrow a$ とした極限の式なので、多少過大評価。

$M_z = M_z^{\text{slide}}$ となるときの捩れ角を δ_{az}^c とすると、silicate や graphite の場合で

$$\delta_{az}^c = \frac{1}{16\pi} \simeq 0.02 \simeq 1.1^\circ \quad (4.9)$$

捩れ角が δ_{az}^c を越えると実質的な滑りが生じ、不可逆に捩れたすと考える。その際散逸されるエネルギー(=捩れ始めるのに必要な最低エネルギー)は

$$e_{\text{twist}} = \frac{1}{2}\delta_{az}^c M_z^{\text{slide}} = \frac{3}{32Ga^3} M_z^{\text{slide}2} = \frac{8}{3}Ga^3\delta_{az}^{c2} \quad (4.10)$$

また、十分な角度($\frac{\pi}{2}$) 捩るために必要なエネルギーは、

$$E_{\text{twist}} = \frac{\pi}{2} M_z^{\text{slide}} = \frac{8}{3}\pi Ga^3\delta_{az}^c \quad (4.11)$$

5 補遺：計算ノート

ここでは、3.2節の \bar{u}_z の計算式 (3.36) 中の積分

$$\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \phi \, d\phi, \quad \text{where } \beta = x \cos \phi + y \sin \phi. \quad (5.1)$$

の値を求める。この積分を J とする。

J の ϕ についての積分区間は、 $[0, 2\pi]$ となっているが、対称性を考えれば ψ_0 を任意の定数として $[\psi_0, \psi_0 + 2\pi]$ としてよい。すなわち、

$$J = \int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \phi \, d\phi. \quad (5.2)$$

いま、 ψ_0 を $\vec{OB} = (x, y)$ の偏角とし、 \vec{OB} と $e_r = (\cos \phi, \sin \phi)$ のなす角を φ とすると

$$\beta = \vec{OB} \cdot e_r = r \cos \varphi, \quad \varphi = \phi - \psi_0 \quad (\iff \phi = \varphi + \psi_0) \quad (5.3)$$

この φ を用いて J を書き下すと、

$$J = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \psi_0) \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi \quad (5.4)$$

$$= \cos \psi_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi - \sin \psi_0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi \quad (5.5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi &= \int_0^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\varphi' + \pi) \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos(\varphi' + \pi)\right) d\varphi' \\ &= \int_0^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \varphi' \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi'\right) d\varphi' \\ &= \int_0^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi \end{aligned} \quad (5.6)$$

であるから

$$J = 2 \cos \psi_0 \int_0^{\pi} \cos \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi - 2 \sin \psi_0 \int_0^{\pi} \sin \varphi \arctan\left(\frac{r}{\alpha} \cos \varphi\right) d\varphi \quad (5.7)$$

さらに、

$$\frac{r}{\alpha} \cos \varphi = \tau, \quad \left(d\varphi = -\frac{\alpha}{r} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2}} \right) \quad (5.8)$$

と置換すると

$$J = -2 \cos \psi_0 \int_{\frac{r}{\alpha}}^{-\frac{r}{\alpha}} \frac{(\alpha/r)^2 \tau}{\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2}} \arctan \tau \, d\tau + 2 \sin \psi_0 \int_{\frac{r}{\alpha}}^{-\frac{r}{\alpha}} \frac{\alpha}{r} \arctan \tau \, d\tau \quad (5.9)$$

$$= 2 \cos \psi_0 \int_{-\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\alpha}} \frac{(\alpha/r)^2 \tau}{\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2}} \arctan \tau d\tau \quad (\leftrightarrow \arctan \tau \text{ は奇関数なので第二項は } 0) \quad (5.10)$$

$$= 2 \cos \psi_0 \left\{ \left[-\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2} \arctan \tau \right]_{-\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\alpha}} + \int_{-\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\alpha}} \sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2} \frac{d\tau}{1 + \tau^2} \right\} \quad (5.11)$$

$$= 2 \cos \psi_0 \int_{-\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2}}{1 + \tau^2} d\tau \quad (5.12)$$

$$= 4 \cos \psi_0 \int_0^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\sqrt{1 - (\alpha/r)^2 \tau^2}}{1 + \tau^2} d\tau \quad (5.13)$$

ここで

$$\frac{\alpha}{r} \equiv k, \quad \tau = \tan \vartheta, \quad \frac{r}{\alpha} = \tan \vartheta_c \quad (5.14)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} J &= 4 \cos \psi_0 \int_0^{\vartheta_c} \frac{\sqrt{1 - k^2 \tan^2 \vartheta}}{1 + \tan^2 \vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = 4 \cos \psi_0 \int_0^{\vartheta_c} \sqrt{1 - k^2 \tan^2 \vartheta} d\vartheta \\ &= 4 \cos \psi_0 \int_0^{\vartheta_c} \sqrt{1 - k^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \vartheta} - 1 \right)} d\vartheta = 4 \cos \psi_0 \int_0^{\vartheta_c} \frac{\sqrt{(1 + k^2) \cos^2 \vartheta - k^2}}{\cos \vartheta} d\vartheta \\ &= 4 \cos \psi_0 \sqrt{1 + k^2} \int_0^{\vartheta_c} \frac{\sqrt{\cos^2 \vartheta - \frac{k^2}{1+k^2}}}{\cos \vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (5.15)$$

さて、積分公式

$$\int \frac{\sqrt{\cos^2 x - c^2}}{\cos x} dx = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 - c^2}} - c \arcsin \frac{c \tan x}{\sqrt{1 - c^2}} \quad (|c| < 1) \quad (5.16)$$

を用い、また

$$1 + k^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{r^2} = \frac{a^2}{r^2} \quad (\leftarrow \alpha = \sqrt{a^2 - r^2}) \quad (5.17)$$

$$\frac{k^2}{1 + k^2} = \frac{(\alpha/r)^2}{1 + (\alpha/r)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + r^2} = \frac{a^2 - r^2}{a^2} \quad (5.18)$$

を代入すると

$$J = 4 \cos \psi_0 \frac{a}{r} \left[\arcsin \left(\frac{a}{r} \sin \vartheta \right) - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \tan \vartheta \right) \right]_0^{\vartheta_c} \quad (5.19)$$

$$= 4 \cos \psi_0 \frac{a}{r} \left\{ \arcsin \left(\frac{a}{r} \sin \vartheta_c \right) - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \tan \vartheta_c \right) \right\} \quad (5.20)$$

ϑ_c の定義式 (5.14) から

$$\tan \vartheta_c = \frac{r}{\alpha} = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (5.21)$$

$$\sin \vartheta_c = \tan \vartheta_c \cos \vartheta_c = \frac{\tan \vartheta_c}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_c}} = \frac{r}{a} \quad (5.22)$$

これらを代入して

$$(5.23)$$

$$J = 4 \cos \psi_0 \frac{a}{r} \left\{ \arcsin \left(\frac{a}{r} \times \frac{r}{a} \right) - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \times \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) \right\} \quad (5.24)$$

$$= 4 \cos \psi_0 \frac{a}{r} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.25)$$

$$= 2\pi \left(\frac{a}{r} - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right) \cos \psi_0 \quad (5.26)$$

ここで、 ψ_0 が \vec{OB} の偏角だったことを思い出すと

$$\cos \psi_0 = \frac{x}{r} \quad (5.27)$$

したがって、

$$\begin{aligned} J &= 2\pi \left(\frac{a}{r} - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right) \frac{x}{r} = 2\pi \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= 2\pi \frac{x}{a} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} \end{aligned} \quad (5.28)$$