

# **Dominik and Tielens (1995, 1997) における回転抵抗**

平成 17 年 9 月 14 日 和田 浩二

## 目次

1 はじめに	2
2 付着力のある弾性球の接触問題 (JKR 理論)	3
3 回転抵抗の導出	4

# 1 はじめに

Dominik and Tielens (1995) で導出され、Dominik and Tielens (1997) の計算に使用されている回転抵抗 (rolling resistance) について簡単にまとめる事とする。

互いに接触している球、あるいは球と平面、を考える。接触を保ったまま球が滑ることなく回転する (= 転がる) とき、その転がりを抑制する働きが回転抵抗である。具体的には、転がりに対して逆方向の力のモーメントを与えることであり、どのような素過程を考慮するかによって様々な定式化がある。

例えば、Johnson (1987) には “micro-slip at the interface, inelastic deformation of the involved materials and surface irregularities” を考慮した、付着力なしの弾性体の回転抵抗がまとめられている (らしい)。しかしながら、付着力が十分に有効に作用するような (サブ) ミクロンサイズの粒子 (微小粒子) を考える上で、このような素過程は重要ではない。なぜなら、微小粒子表面上における変位は原子径程度であり、非弾性変形の原因となる転位運動 (dislocation) は効かない。また微小粒子における接触面のサイズは  $50\text{\AA}$  程度であり、表面の粗さも効かない。

微小粒子においては、原子レベルの付着と分離が重要となる。転がる過程において、接触面の前縁 (進行方向の縁: leading edge) では原子同士が付着し後縁 (trailing edge) では原子同士が分離する。分離する過程ではある程度「引き伸ばされ」てから離れるため、前縁部と後縁部で非対称な圧力分布が生じることになり、これが回転抵抗を生み出す。

このような原子レベルから回転抵抗を計算するためには、付着と分離に関するエネルギー散逸量を直接計算すればよいが、面倒である。そこで、Dominik and Tielens (1995) では、付着力を考慮した球の弾性接触問題を扱う JKR 理論 (Johnson, Kendall and Roberts, 1971; Johnson, 1987) を用いた簡単なモデルによって、回転抵抗を導出した。

考え方の概要:

「接触面中心」と「接触点 (球の中心間を結んだ線と接平面の交点)」が、粒子の回転によってずれる。このずれによって生じる非対称圧力分布  $p(x,y)$  からモーメントを計算する。

$$M_y = - \iint_S xp(x,y) dx dy \quad (1.1)$$

ここでは、接触面  $S$  に  $xy$  平面を設定し、球の進行方向を  $x$  軸の正の方向とする。 $p(x,y)$  が接触面における圧力分布で、これが  $p(x,y) = p(-x,y)$  なら上記モーメントは 0 となるが、非対称  $p(x,y) \neq p(-x,y)$  ならばモーメントは 0 とならずに回転抵抗が与えられる。

## 2 付着力のある弾性球の接触問題 (JKR 理論)

ここで JKR 理論の帰結をまとめておく。

半径  $R_1, R_2$ 、ヤング率  $E_1, E_2$ 、ポアソン比  $\nu_1, \nu_2$  の 2 つの弾性球が、表面エネルギー  $\gamma$  のもとで接触している。

外力なしで弾性力と付着力が釣り合っている時の接触面 (円) の半径は、

$$a_0 = \left( \frac{9\pi\gamma R^2}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.1)$$

ここで、 $R, E^*$  はそれぞれ 2 球の換算半径および換算修正ヤング率：

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{E^*} \equiv \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (2.3)$$

静かに (準静的に) 球を引き離すのに必要な力は

$$F_c = 3\pi\gamma R \quad (2.4)$$

また釣り合っている時の球の中心間の接近変位は

$$\delta_0 = \frac{a_0^2}{3R} = \frac{F_c}{E^* a_0} \quad (2.5)$$

接触面の半径  $a$ 、粒子間に働く力  $F$  (圧縮を正)、接近変位  $\delta$  を各々  $a_0, F_c, \delta_0$  で規格化した量を  $\hat{a}, \hat{F}, \hat{\delta}$  として

$$\hat{a} = \frac{a}{a_0}, \quad \hat{F} = \frac{F}{F_c}, \quad \hat{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0} \quad (2.6)$$

これらの関係式は以下ようになる：

$$\hat{F} = 4 \left( \hat{a}^3 - \hat{a}^{\frac{3}{2}} \right) \quad (2.7)$$

$$\hat{\delta} = 3\hat{a}^2 - 2\hat{a}^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

また、回転していないときの接触面における圧力分布は、接触面の中心を原点とする  $xy$  平面を接触面にとって

$$p(r, a) = p_H(a) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} + p_B(a) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

ここで  $p_H(a), p_B(a)$  はそれぞれ

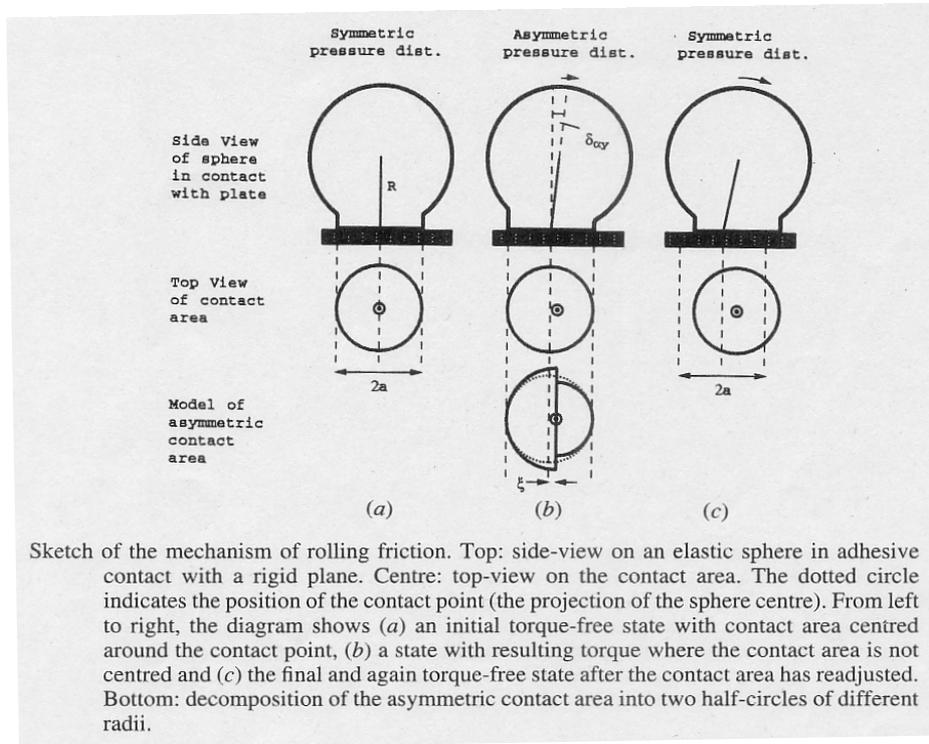
$$p_H(a) = \frac{2aE^*}{\pi R} = 6 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a} \quad (2.10)$$

$$p_B(a) = -\sqrt{\frac{4\gamma E^*}{\pi a}} = -2 \frac{F_c}{\pi a_0^2} \hat{a}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

$p_H(a), p_B(a)$  を用いると接近変位  $\delta$  は以下の式で表される：

$$\delta = \frac{\pi a}{2E^*} (p_H + 2p_B) \quad (2.12)$$

### 3 回転抵抗の導出



Sketch of the mechanism of rolling friction. Top: side-view on an elastic sphere in adhesive contact with a rigid plane. Centre: top-view on the contact area. The dotted circle indicates the position of the contact point (the projection of the sphere centre). From left to right, the diagram shows (a) an initial torque-free state with contact area centred around the contact point, (b) a state with resulting torque where the contact area is not centred and (c) the final and again torque-free state after the contact area has readjusted. Bottom: decomposition of the asymmetric contact area into two half-circles of different radii.

図 1: Dominik and Tielens (1995) の Fig.2 より

簡単のために、球と平面が JKR 理論的に接触している状態を考える ( $R = R_1$  と考えればよい) (図 1)。接触面に  $xy$  平面をとり、「接触点 (球の中心から平面に下ろした垂線の足)」を原点とする。 $x$  軸の正の向きを球の回転による進行方向にとり、上向きに  $z$  軸をとる。このとき球は  $y$  軸正の方向に対して右回り (正の向き) に回転することになる。また球が平面から受ける圧力  $p$  は  $z > 0$  の向きを正とする。

球が角度  $\delta_{\alpha y}$  だけ転がったとすると、接触点の移動距離  $\xi$  は

$$\xi = R\delta_{\alpha y} \quad (3.1)$$

このとき接触面はそのままだとすると接触面の中心と接触点とが距離  $\xi$  だけずれることになり、このため転がりに抵抗するトルク (回転抵抗) が発生する。回転抵抗が作用するのをものともせず転がり続けると  $\xi$  はやがてある基準値  $\xi_{crit}$  を超える。この時に接触面の付け替え (前方が付着し後方が剥がれる) が生じ、再び接触面中心と接触点とが一致するようになると考える (リセットされる)。

以上の状況をさらに以下のように簡単に近似して計算する。

図 1 の真ん中にあるように、接触面を接触点を中心に前半円と後半円に分けて、

- 後半円 ( $x < 0$ ) : 半径  $a + \xi$ 、圧力分布は  $p(r, a + \xi, \delta)$
- 前半円 ( $x > 0$ ) : 半径  $a - \xi$ 、圧力分布は  $p(r, a - \xi, \delta)$

圧力分布関数に陽に  $\delta$  を示したのは、接近変位  $\delta$  を保ったまま (i.e. 回転では粒子間距離は不変)  $a$  を  $\pm\xi$  変化させたものを考える ( $a$  と  $\delta$  は独立変数とする) ということである。また、 $x=0$  で不連続となっているが、 $y$  軸から遠くの縁では元の接触面に沿うようになっている<sup>1</sup>。

JKR 理論の圧力分布 (式 (2.9)) で、 $\delta$  を一定に保ったまま  $a$  を変化させることを考える。そのために、 $\delta$  を与える式 (2.12) から

$$p_B(a) = \frac{E^*}{\pi a} \delta - \frac{1}{2} p_H(a) \quad (3.2)$$

として、これを式 (2.9) に代入して圧力分布を与える：

$$p(r, a, \delta) = p_H(a) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{E^*}{\pi a} \delta - \frac{1}{2} p_H(a)\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

式 (2.9) において第 2 項 ( Boussinesq 型圧力分布 ) は接触面上一様な垂直変位を付加する圧力分布であるから、このような操作は、 $a$  を変化させて生じる  $\delta$  の変化をその第 2 項 (すなわち  $p_B$ ) の働きで補って  $\delta$  を一定に保つようにしていると考えられる。

このとき球に働くモーメントは式 (1.1) にならって以下ようになる：

$$M_y = - \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{a+\xi} xp(r, a+\xi, \delta) r dr d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a-\xi} xp(r, a-\xi, \delta) r dr d\varphi \right\} \quad (3.4)$$

$x = r \cos \varphi$  だから、 $\varphi$  に関する積分をまず行くと

$$M_y = 2 \int_0^{a+\xi} r^2 p(r, a+\xi, \delta) dr - 2 \int_0^{a-\xi} r^2 p(r, a-\xi, \delta) dr \quad (3.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} M_{y, \mathcal{A}, \delta}^{(1/2)} &\equiv 2 \int_0^{\mathcal{A}} r^2 p(r, \mathcal{A}, \delta) dr \\ &= 2 p_H \int_0^{\mathcal{A}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr + 2 \left(\frac{E^*}{\pi \mathcal{A}} \delta - \frac{p_H}{2}\right) \int_0^{\mathcal{A}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{A}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \end{aligned} \quad (3.6)$$

とおくと、

$$M_y = M_{y, a+\xi, \delta}^{(1/2)} - M_{y, a-\xi, \delta}^{(1/2)} \quad (3.7)$$

となるので、 $M_{y, \mathcal{A}, \delta}^{(1/2)}$  を求めればよい。式 (3.6) 中の積分は

$$\int_0^{\mathcal{A}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr = \mathcal{A}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\mathcal{A}^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{16} \mathcal{A}^3 \quad (3.8)$$

$$\int_0^{\mathcal{A}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{A}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr = \mathcal{A}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \mathcal{A}^3 \quad (3.9)$$

だから、

$$\begin{aligned} M_{y, \mathcal{A}, \delta}^{(1/2)} &= 2 \left\{ p_H \frac{\pi}{16} \mathcal{A}^3 + \left(\frac{E^*}{\pi \mathcal{A}} \delta - \frac{p_H}{2}\right) \frac{\pi}{4} \mathcal{A}^3 \right\} \\ &= \frac{1}{2} E^* \mathcal{A}^2 \delta - \frac{\pi}{8} p_H \mathcal{A}^3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} E^* \mathcal{A}^2 \delta - \frac{3}{4} F_c \frac{\mathcal{A}^4}{a_0^3} \quad (\leftarrow p_H \text{ の表式 (2.10) を代入した}) \quad (3.11)$$

<sup>1</sup>Dominik and Tielens (1995) の Appendix では 2 次元問題において同様に近似して解いた解と、まじめに計算した解析解とを比較し、近似解は厳密解とほとんど同じ ( $\frac{\pi}{2}$  倍違うだけ) であることを示している。

さて、 $\xi$  は原子径程度 ( $\sim \text{\AA}$ ) なので  $\frac{\xi}{a} \ll 1$  の近似を用いると

$$\mathcal{A}^2 = (a \pm \xi)^2 = a^2 \left(1 \pm \frac{\xi}{a}\right)^2 \simeq a^2 \pm 2a\xi \quad (3.12)$$

$$\mathcal{A}^4 = (a \pm \xi)^4 = a^4 \left(1 \pm \frac{\xi}{a}\right)^4 \simeq a^4 \pm 4a^3\xi \quad (3.13)$$

従って

$$\begin{aligned} M_y &= M_{y,a+\xi,\delta}^{(1/2)} - M_{y,a-\xi,\delta}^{(1/2)} \\ &\simeq \left\{ \frac{1}{2} E^* (a^2 + 2a\xi) \delta - \frac{3}{4} F_c \frac{a^4 + 4a^3\xi}{a_0^3} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} E^* (a^2 - 2a\xi) \delta - \frac{3}{4} F_c \frac{a^4 - 4a^3\xi}{a_0^3} \right\} \\ &= 2\xi (E^* a \delta - 3F_c a^3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

式 (2.5)(2.8) から

$$\delta = \delta_0 (3\hat{a}^2 - 2\hat{a}^{1/2}) = \frac{F_c}{E^* a_0} (3\hat{a}^2 - 2\hat{a}^{1/2}) \quad (3.15)$$

これを式 (3.14) に代入して

$$M_y = -4F_c \hat{a}^{3/2} \xi \quad (3.16)$$

- $\xi > 0$  のとき  $M_y < 0$  であるから、求めた  $M_y$  は球の回転方向 ( $y$  軸回りに正の方向) とは逆方向のモーメントとなり、確かに回転抵抗を与えることがわかる。
- $M_y$  は  $\xi$  に比例しているため、バネのように作用する。接触面のリセットがおこらない ( $\xi < \xi_{\text{crit}}$ ) 間は、平衡点を中心に振動するだけである。このときエネルギーは散逸しない。
- $\xi > \xi_{\text{crit}}$  となると転がり始める。転がり始めるのに必要なエネルギーを  $e_{\text{roll}}$  とすると、

$$e_{\text{roll}} = \frac{|M_y(\xi_{\text{crit}})|}{R_1} \xi_{\text{crit}} = 4F_c \hat{a}^{3/2} \frac{\xi_{\text{crit}}^2}{R_1} \quad (3.17)$$

球と球の接触回転の場合にはこの式で  $R_1 = 2R$  とおいて、

$$e_{\text{roll}} = 2F_c \hat{a}^{3/2} \frac{\xi_{\text{crit}}^2}{R} = 6\pi\gamma \xi_{\text{crit}}^2 \hat{a}^{3/2} \quad (3.18)$$

転がり始めると  $e_{\text{roll}}$  だけエネルギーが散逸する。

さらに、 $\pi R$  の距離転がる ( $= \frac{\pi}{2} R_1$ 、つまり一方の球が他方の球の周囲を  $90^\circ$  転がる) のに必要なエネルギーを  $E_{\text{roll}}$  とすると

$$E_{\text{roll}} = e_{\text{roll}} \frac{\pi R}{\xi_{\text{crit}}} = 6\pi^2 \gamma R \xi_{\text{crit}} \hat{a}^{3/2} \quad (3.19)$$