

付着力を考慮した弾性球の接触 (JKR 理論)

平成 17 年 9 月 15 日 和田 浩二

目次

1	はじめに	2
2	半無限弾性体への点荷重 (Point loading of an elastic half-space) による変位	2
3	半無限弾性体の円領域への荷重 (Pressure applied to a circular region) による変位	4
3.1	Boussinesq 型圧力分布, $n = -\frac{1}{2}$	4
3.2	Hertz 型圧力分布, $n = \frac{1}{2}$	6
4	Hertz 理論:弾性体の正面接触 (normal contact of elastic solids)	7
5	付着力を考慮した弾性体接触理論 (JKR 理論)	12
5.1	導出	12
5.2	規格化した関係式	17
5.3	エネルギーに関する議論	19

1 はじめに

半径 R_1, R_2 、ヤング率 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_1, ν_2 の2つの弾性球が接触している時の、接触面(円)半径 a 、球間に働く力 F 、球の中心間の接近変位 δ の関係を与えるのが Hertz 理論である。これは、H. Hertz によって解かれたもので (Hertz, 1881)、弾性接触理論の基礎となっている。

さらに、Hertz 理論に付着力 (adhesion、ここでは表面エネルギー γ とする) を考慮した理論が JKR 理論であり、この問題を初めて取り扱った、Johnson, Kendall, and Roberts (1971) にちなんで名付けられた。ここでは、JKR 理論の導出過程および導出される関係式をまとめることを目指す。

ちなみに、JKR 理論は接触面の縁付近では破綻する (圧力が無限大になる) がそこを除けば引き離すのに必要な力などおおよそ実験とも調和的である。

以下では、主に弾性接触理論の教科書である Johnson (1987) に沿って解説する。半無限弾性体の点荷重問題から始まり Hertz 理論を経て JKR 理論まで述べる事とする。考え方は端的には、球の接触を半無限弾性体にかかる圧力問題とすることである。JKR 理論の導出および議論においては Johnson et al.(1971) および Chokshi et al.(1993) も参照した。

2 半無限弾性体への点荷重 (Point loading of an elastic half-space) による変位

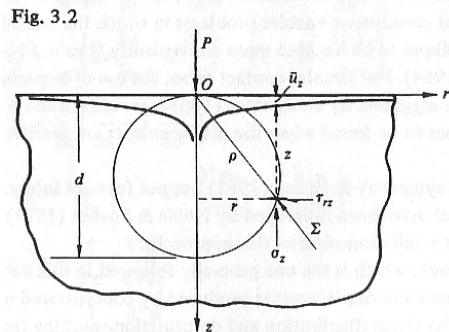


図 1: Johnson(1987) の Fig.3.2 より

半無限弾性体 (ヤング率 E 、ポアソン比 ν) の自由表面に xy 平面を設定し、下向きに z 軸を設定する。原点 O に、自由表面に垂直な集中力 P が作用している状態を考える (図 1)。次節ではこの点荷重の重ねあわせとして、円領域 (後の議論で球同士の接触面に相当) にかかる圧力分布と変位の関係を求める。

このとき、Hooke の法則による歪みと応力の関係式、およびラプラス方程式を満たすポテンシャル関数を用いると、半無限弾性体内の応力と変位は以下のように与えられる (詳細は Johnson (1987)

の第3章参照) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right\} - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right] \quad (2.1)$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right\} - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right\} - \frac{3xyz}{\rho^5} \right] \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5} \quad (2.5)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5} \quad (2.6)$$

$$u_x = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\} \quad (2.7)$$

$$u_y = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\} \quad (2.8)$$

$$u_z = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right\} \quad (2.9)$$

z 軸対称座標系 (r, θ, z) での表式は以下ようになる：

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} \right) - \frac{3zr^2}{\rho^5} \right\} \quad (2.10)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3} \right) \quad (2.11)$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \quad (2.12)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{\rho^5} \quad (2.13)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{rz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{\rho-z}{\rho r} \right\} \quad (2.14)$$

$$u_z = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right\} \quad (2.15)$$

さて、表面 ($z=0$) での変位を \bar{u}_r 、 \bar{u}_z と定義すると、上の式 (2.14)(2.15) から

$$\bar{u}_r = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)P}{2\pi E} \frac{1}{r} \quad (2.16)$$

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{P}{r} \quad (2.17)$$

3 半無限弾性体の円領域への荷重 (Pressure applied to a circular region) による変位

半無限弾性体の自由表面上の点 $C(\xi, \eta)$ に垂直圧力 p が作用しているとき、点 C から離れた自由表面上の点 $B(x, y)$ における z 方向の変位は、式 (2.17) から

$$\bar{u}_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{p s d s d \phi}{s} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p d s d \phi \quad (3.1)$$

ここで、 s は B から C までの距離 ($s \equiv \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$) で、 ϕ は B から見た C の偏角。

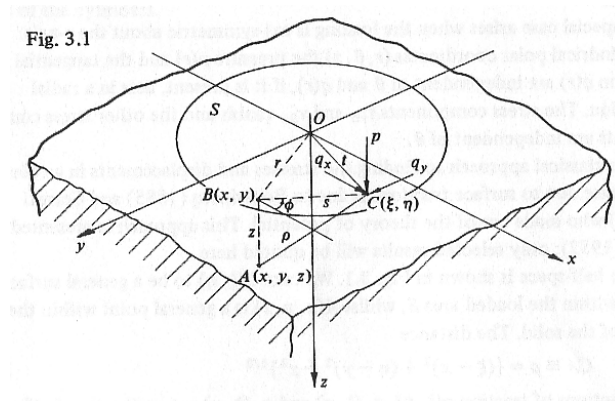


図 2: Johnson(1987) の Fig.3.1 より

表面上の任意の領域 S 内において圧力分布 $p(x, y)$ がある場合には、点 $B(x, y)$ における z 方向の変位は、上式の点荷重による変位の重ねあわせて

$$\bar{u}_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_S p(s, \phi) d s d \phi \quad (3.2)$$

以下では、 S として原点を中心とする半径 a の円領域を考え、さらに次のような軸対象の圧力分布を考える：

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^n \quad (3.3)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で、 p_0 は定数 (原点における圧力)、指数 n の値によってさまざまな状況が考えられるが、ここでは特に $n = \pm \frac{1}{2}$ の二通りの場合を議論する。

3.1 Boussinesq 型圧力分布, $n = -\frac{1}{2}$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

この圧力分布は、半径 a の円領域 S 内であれば、変位 \bar{u}_z が場所 r によらずどこも一定 (Uniform normal displacement) となる。Boussinesq によって解かれたものである。では、実際に式 (3.2) を用いて \bar{u}_z を求めてみよう。

Fig. 3.5. Pressure applied to a circular region. Displacement: (a) at an internal point B ; (b) at an external point B .

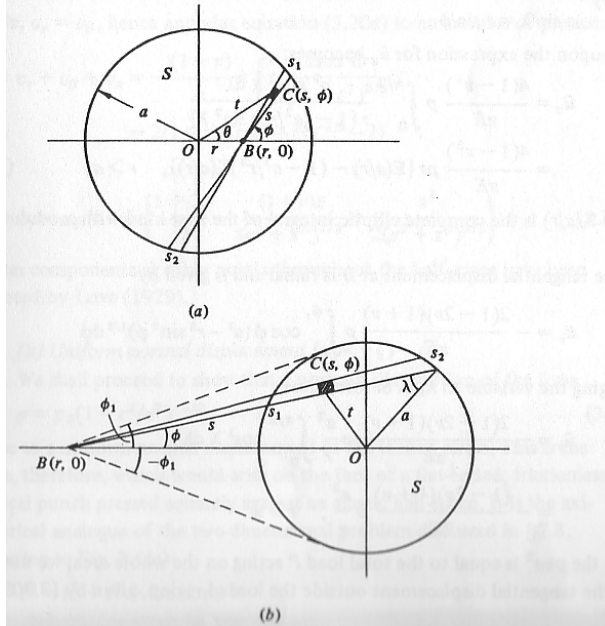


図 3: Johnson(1987) の Fig.3.5 より

図 3(a) に示すように、点 $B(r, 0)$ における \bar{u}_z を求める (S 内の点を考えるので、 $r < a$)。原点から点 C までの距離を t とすると

$$t^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos(\pi - \phi) = r^2 + s^2 + 2rs \cos \phi \quad (3.5)$$

したがって C における圧力 $p(s, \phi)$ は

$$\begin{aligned} p(s, \phi) &= p_0 a (a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = p_0 a (a^2 - r^2 - 2rs \cos \phi - s^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= p_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで $\alpha^2 \equiv a^2 - r^2$, $\beta \equiv r \cos \phi$ とおいた。この $p(s, \phi)$ を式 (3.2) に代入して

$$\bar{u}_z(r) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p_0 a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

ただし、 s_1 は図 3(a) に示されているように、点 B から B を通る弦と円の交点までの距離であり、 $t = a$ となる時の s 即ち $\alpha^2 - 2\beta s - s^2 = 0$ の正の実数解である：

$$s_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \quad (3.8)$$

さて、積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{|a|} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (a < 0) \quad (3.9)$$

を用いると、式 (3.7) の s に関する積分は以下のように計算される：

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left[-\arcsin \left(\frac{-s - \beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \right) \right]_0^{s_1} = -\arcsin(-1) + \arcsin \left(\frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

ところで、 $\beta(\phi) = r \cos \phi$ だから $\beta(\phi + \pi) = -\beta(\phi)$ 。したがって $\arctan\left(\frac{\beta(\phi+\pi)}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)$ となるので $\arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right)$ の ϕ に関する区間 $[0, 2\pi]$ の積分は 0 となる。すると式 (3.7) の積分は

$$\int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta(\phi)}{\alpha}\right) \right\} = \left[\frac{\pi}{2} \phi \right]_0^{2\pi} = \pi^2 \quad (3.11)$$

となり、結局式 (3.7) で計算される \bar{u}_z は

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p_0 a \times \pi^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} \pi a p_0 \quad (3.12)$$

確かに、 \bar{u}_z は場所 r に依らずどこでも同じ変位となる。

円領域 S 全体にかかっている力 F を計算すると

$$F = \int_0^a p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} 2\pi r dr = 2\pi a^2 p_0 \quad (3.13)$$

式 (3.12)(3.13) から p_0 を消去すると、変位 \bar{u}_z と全体力 F の関係式が得られ、

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{2aE} F \quad (3.14)$$

ちなみに、点 B が S の外側にあった場合 (図 3(b))、

$$p(s, \phi) = p_0 a \left(\alpha^2 + 2\beta s - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

となり、変位 $\bar{u}_z(r > a)$ を同様に求めると、

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(r) &= \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p_0 a \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{s_1}^{s_2} ds \left(\alpha^2 + 2\beta s - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p_0 a \int_{-\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)}^{\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)} \pi d\phi = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} a p_0 \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$r = a$ では領域内の変位の式 (3.12) と一致し変位は連続であるが、傾きは無限大となる。

以上のように、Boussinesq 型圧力分布では領域内の変位は均一となり、これは硬い (変形しない) 円柱型パンチを押し込んだ状況と考えられる。ただし、上でも述べたように領域の縁のすぐ外側では表面変位の傾きが無限大となる。そもそも、Boussinesq 型圧力分布では領域の縁のすぐ内側では圧力は発散していることに注意したい。

3.2 Hertz 型圧力分布, $n = \frac{1}{2}$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

この圧力分布は、後に述べる Hertz 理論における圧力分布である。先の Boussinesq 型圧力分布で行った計算と同様に、表面上の点 $B(r, 0)$ における z 方向の変位 \bar{u}_z は、以下のように計算される：

$$\bar{u}_z(r) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_1} ds \left(\alpha^2 - 2\beta s - s^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

積分公式

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b^2 - 4ac}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3.19)$$

および先の公式 (3.9) を用いると、式 (3.18) の s に関する積分は以下のように計算される：

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} ds (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{s + \beta}{2} \sqrt{\alpha^2 - 2\beta s - s^2} \right]_0^{s_1} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

やはり $\beta(\phi + \pi) = -\beta(\phi)$ により $\alpha\beta$ および $\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ の ϕ に関する区間 $[0, 2\pi]$ の積分は 0 となる。すると式 (3.18) の積分は

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} (\alpha^2 + \beta^2) d\phi = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \phi) d\phi = \frac{\pi^2}{4} (2a^2 - r^2) \quad (3.21)$$

となり、 \bar{u}_z は

$$\bar{u}_z(r) = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (3.22)$$

円領域 S 全体にかかる力 F は

$$F = \int_0^a p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0 \quad (3.23)$$

よって、平均圧力 p_m は

$$p_m \equiv \frac{F}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_0 \quad (3.24)$$

となって中心圧力 (= 最高圧力) の $\frac{2}{3}$ 倍となっている。

4 Hertz 理論: 弾性体の正面接触 (normal contact of elastic solids)

前節で、半無限弾性体表面にかかる圧力と垂直変位の関係を求めた。これをもとに弾性球接触を論じ、Hertz 理論を導出する。

半径 R_1, R_2 の 2 つの弾性球がちょうど接する状態からさらに近づくと、円形の接触面が生じ、2 球間に弾性力による反発力が働く。それぞれの球の中心の接近変位を δ_1, δ_2 とする。問題は、その相対接近変位 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ を与えたときに生じる接触面の半径 a および 2 球間に働く力 F を求めることである (あるいは、 δ, a, F の関係式を求めること)。

接触面に xy 平面を導入し、球の中心線上に z 軸を取る (図 4)。さて、Hertz 理論では以下の仮定をおく：

- 弾性体の表面は連続で非適合 (non-conforming)。つまり $a \ll R$
- 生じる歪みは小さい。つまり $a \ll R$
- 接触面は半無限弾性体表面とする。つまり $a \ll R, a \ll l$ 。 l は変形の及ぶ特徴的距離。

Fig. 4.2.

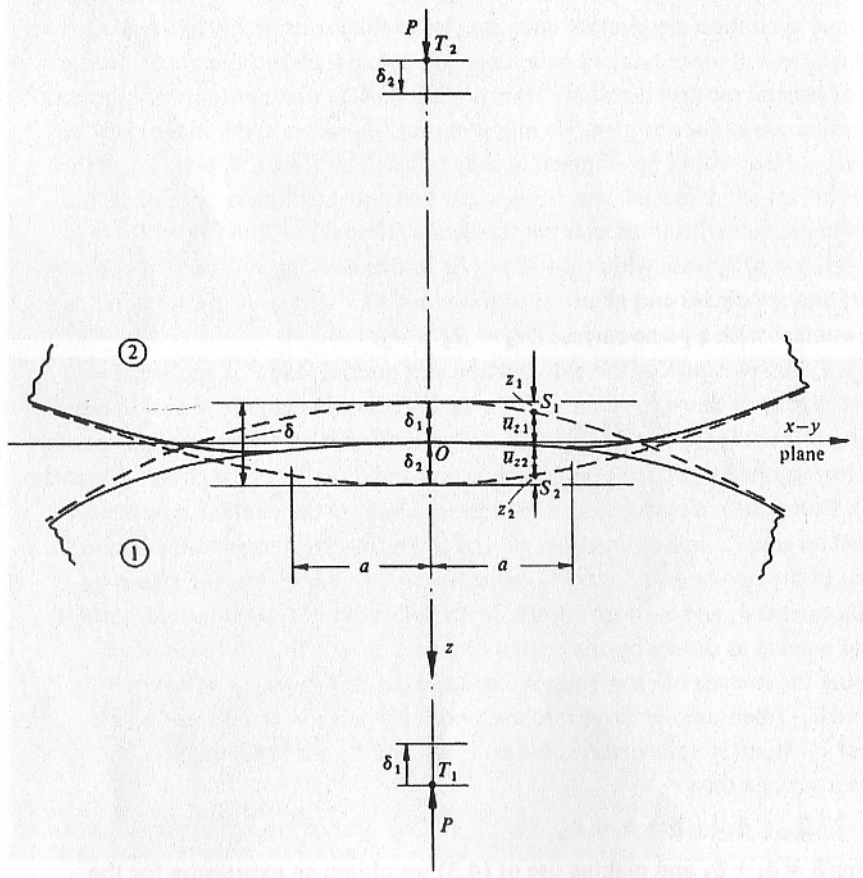


図 4: Johnson(1987) の Fig.4.2 より

- 接触面は摩擦なし。つまり接触面上の接線方向荷重を考えないので、垂直荷重のみによって生じる変位・応力分布のみを考えればよい。

変形前の球面は、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると $r \ll R_{1,2}$ の条件によって

$$z_1 = \frac{1}{2R_1}r^2, \quad z_2 = \frac{1}{2R_2}r^2 \quad (4.1)$$

と近似される。接触面が生じている状態において、接触面上の r の位置にある点の変形前からの z 方向の変位量をそれぞれ \bar{u}_{z1} , \bar{u}_{z2} とすると、単純な幾何学的関係から、

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - (z_1 + z_2) \quad (4.2)$$

ここで2球の換算半径を R とすると ($\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$)、上式は

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R}r^2 \quad (4.3)$$

さて、変位 \bar{u}_{z1} , \bar{u}_{z2} は、仮定から、半無限弾性体の表面上の圧力分布によって生じる垂直変位で与える。ただし、式 (4.3) を満たす \bar{u}_{z1} , \bar{u}_{z2} を生じる圧力分布がどのようなものであるべきかは自明ではない。しかし、電荷分布のアナロジーから前節で述べた Hertz 型の圧力分布

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (4.4)$$

が適当であることが分かっている (例えば Landau and Lifshitz の弾性論参照：この妥当性は後に確かめられる)。この圧力分布のもとで生じる変位は前節で求めた式 (3.22) で与えられるので、式 (4.3) の左辺は以下ようになる

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = \frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (4.5)$$

ここで記述を簡単にするために、換算ヤング率 (とでもいうべき?) $\frac{1}{E^*} \equiv \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$ を用いた。すると式 (4.3) は以下ようになる:

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{1}{2R}r^2 \quad (4.6)$$

両辺が r について同型の2次関数となっており、Hertz 型の圧力分布 (式 (4.4)) が妥当であることを示している。この等式は r について恒等的に成り立つ必要があることから、 r^2 の係数を比較して

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} = \frac{1}{2R} \quad (4.7)$$

定数項を比較して

$$\frac{\pi a p_0}{2E^*} = \delta \quad (4.8)$$

さらに、接触面全体で働く力 F は式 (3.23) で求めたとおりであるから、 p_0 は F と a を用いて

$$p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (4.9)$$

と表される。これを式 (4.7)(4.8) に代入して

$$F = \frac{4E^*}{3R}a^3 \iff a = \left(\frac{3R}{4E^*}F \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.10)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9F^2}{16E^*2R} \right)^{\frac{1}{3}} \iff F = \frac{4E^*}{3} \sqrt{R} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (4.11)$$

また、

$$p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \frac{2aE^*}{\pi R} = \left(\frac{6E^*2F}{\pi^3 R^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.12)$$

これらの式 (4.10)(4.11)(4.12) が Hertz 理論で導出される関係式である。

接触面における圧力分布は式 (4.4) のとおりであるが、まだ不定性がある。Hertz 理論の条件としては、変位に関する幾何学的関係式 (4.3) を満たせばよいので、前節で述べた接触面内において一様変位を生じる圧力分布

$$p = p'_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

を足した圧力分布も考え得る。しかし、この Boussiesq 型圧力分布を足すあわすことは問題である。もし $p'_0 > 0$ だとすると前節で述べたように接触面の縁のすぐ外側で変位の傾きが無限大となってしまう。これは 2 球が接触面の外側でも接触することを意味し、却下される。また、 $p'_0 < 0$ だとすると、接触面の縁のすぐ内側において無限大の引張応力を持つことになり、付着力のような引力が 2 球間に働かない限り不可能である。したがって、Hertz 理論における接触面内圧力分布は Boussiesq 型圧力分布を足すことなく、一意に

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{3F}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{2aE^*}{\pi R} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (4.14)$$

で与えられる。なお、接触面上における応力分布を求めると図 5 のようになる。接触面内のほとんどの場所において応力は圧縮であるが、動径方向応力 σ_r は接触面の縁のすぐ内側およびそれ以遠で引張応力となっている。

Fig. 4.3. Stress distributions at the surface and along the axis of symmetry caused by (left) uniform pressure and (right) Hertz pressure acting on a circular area radius a .

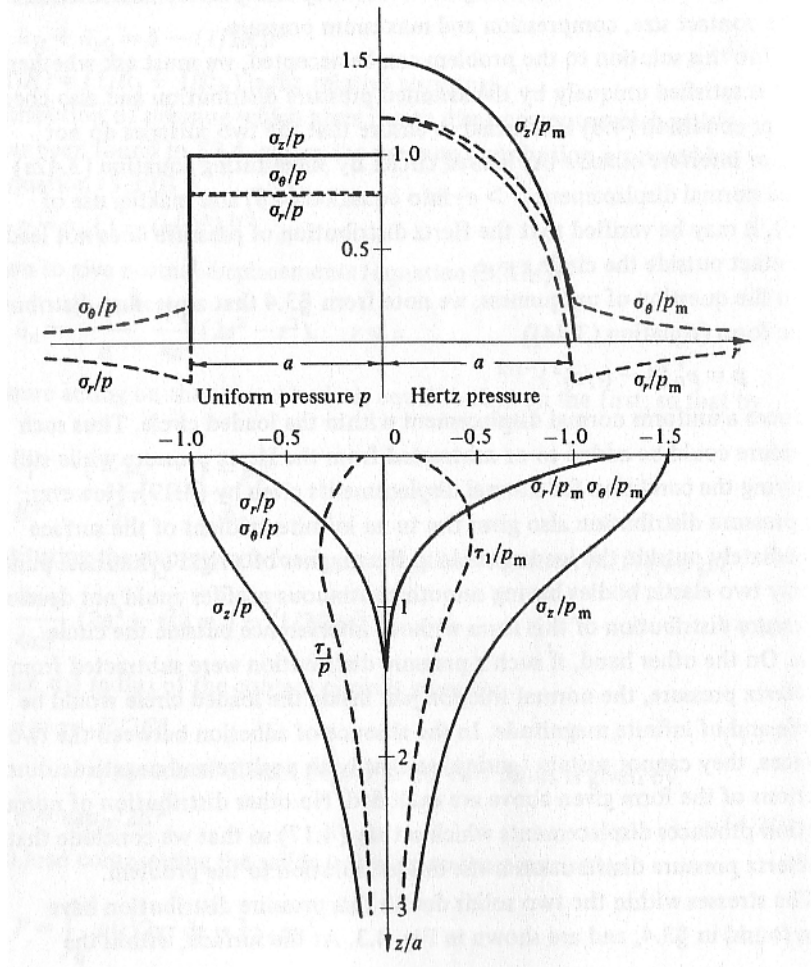


図 5: Johnson(1987) の Fig.4.2 より

5 付着力を考慮した弾性体接触理論 (JKR 理論)

付着力がある場合の2球の接触問題も、Hertz 理論をもとに考える。

5.1 導出

幾何的關係式

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R}r^2 \quad (5.1)$$

を満たす接触面内圧力分布として、付着力があることを考慮して Hertz 型圧力分布に Boussinesq 型圧力分布を足した

$$p = p_H \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + p_B \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

を考える。付着力は引力であるから $p_B < 0$ である。Boussinesq 型圧力分布による変位 \bar{u}_z は式 (3.12) で与えられるから、式 (5.1) は以下ようになる：

$$\frac{\pi p_H}{4aE^*} (2a^2 - r^2) + \frac{\pi a p_B}{E^*} = \delta - \frac{1}{2R}r^2 \quad (5.3)$$

Hertz 理論の際に行ったのと同様に r の恒等式となるよう両辺を比較すると

$$p_H = \frac{2aE^*}{\pi R} \quad (5.4)$$

$$\delta = \frac{\pi a}{2E^*} (p_H + 2p_B) \quad (5.5)$$

また、接触面全体に働く力 F は、圧縮方向を正として

$$F = \int_0^a p 2\pi r dr = \left(\frac{2}{3}p_H + 2p_B\right) \pi a^2 \quad (5.6)$$

と計算される。

さて、 $p_H(a)$ の表式は得られたが、 $p_B(a)$ の表式が未知である。付着力の効果も p_B に表れるはずであり、これを求める必要がある。そのために、接触状態で蓄えられているエネルギーについて議論していく。

まず、蓄えられている弾性エネルギー U_E を以下のように2段階に分けて求める。接触していない状態から始めて、最終的に接触面半径が $a = a_1$ 、接近変位が $\delta = \delta_2$ の状態を実現するとして

1. Hertz 力で接触面半径が $a = a_1$ になるまで押す。このとき接近変位は $\delta = \delta_1$ になっている。ここまでで蓄えられる弾性エネルギーを U_1 とする。
2. 続いて接触面半径を $a = a_1$ に保ったまま接近変位が $\delta = \delta_2$ になるまで Boussinesq 力で押す (実際は引力 ($p_B < 0$) なので、負荷を下げていくことになる)。Boussinesq 型圧力分布による変位は一様変位であるから $a = a_1$ を保ったまま δ を変化させることが可能となる。この過程で蓄えられる (解放される) 弾性エネルギーを U_2 とする。

1. の過程では Hertz 理論から

$$F = \frac{2}{3}\pi a^2 p_H = \frac{4E^*}{3R}a^3 \quad (5.7)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} \quad (5.8)$$

であるから、

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_0^{\delta_1} F d\delta = \int_0^{a_1} \frac{4E^*}{3R} a^3 \frac{2a}{R} da = \frac{8}{15} \frac{E^*}{R^2} a_1^5 \\ &= \frac{8}{15} \frac{E^*}{R^2} a_1^3 \left(\frac{\pi R}{2E^*} p_{H1} \right)^2 = \frac{2}{15} \frac{\pi^2 a_1^3}{E^*} p_{H1}^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここで $p_{H1} \equiv p_H(a_1) = \frac{2a_1 E^*}{\pi R}$ を用いた。

次に 2. の過程では式 (3.13)(3.12) から

$$F = F_1 + 2\pi a_1^2 p_{B1} \quad (5.10)$$

$$\delta = \delta_1 + \frac{\pi a_1}{E^*} p_{B1} \quad (5.11)$$

ただし、 F_1 は 1. の過程において $\delta = \delta_1$ に達したときの力で

$$F_1 = \frac{2}{3}\pi a_1^2 p_{H1} \quad (5.12)$$

また $p_{B1} \equiv p_B(a_1)$ である。式 (5.10)(5.11) から p_{B1} を消去すると

$$F = 2a_1 E^* (\delta - \delta_1) + F_1 \quad (5.13)$$

が得られる。すると

$$U_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_2} F d\delta = \int_{F_1}^{F_2} F \frac{dF}{2a_1 E^*} = \frac{F_2^2 - F_1^2}{4a_1 E^*} \quad (5.14)$$

これに式 (5.12) および

$$F_2 = F_1 + 2\pi a_1^2 p_{B1} = \left(\frac{2}{3} p_{H1} + 2p_{B1} \right) \pi a_1^2 \quad (5.15)$$

を代入して計算すると

$$U_2 = \frac{\pi^2 a_1^3}{E^*} \left(\frac{2}{3} p_{H1} p_{B1} + p_{B1}^2 \right) \quad (5.16)$$

以上から U_E は、 a_1 , p_{H1} , p_{B1} を a , p_H , p_B と改めて

$$U_E = U_1 + U_2 = \frac{\pi^2 a^3}{E^*} \left(\frac{2}{15} p_H^2 + \frac{2}{3} p_H p_B + p_B^2 \right) \quad (5.17)$$

となる。

さて、仮想的に接近変位 δ を一定に保ったまま接触面半径 a を変化させる時の U_E の変化、すなわち

$$\left(\frac{\partial U_E}{\partial a} \right)_\delta \quad (5.18)$$

を計算する。 δ を一定に保つという条件は δ を定数として式 (5.5) から

$$p_B = \frac{E^*}{\pi a} \delta - \frac{p_H}{2} = \frac{E^*}{\pi a} \delta - \frac{aE^*}{\pi R} \quad (5.19)$$

を U_E の式 (5.17) に代入して計算すればよい。式 (5.4) も代入すると

$$U_E = \frac{\pi^2 a^3}{E^*} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{aE^*}{\pi R} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E^{*2} \delta}{\pi^2 R} + \left(\frac{E^* \delta}{\pi a} \right)^2 \right\} \quad (5.20)$$

となるので

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_E}{\partial a} \right)_\delta &= \frac{\pi^2 a^2}{E^*} \left\{ \left(\frac{aE^*}{\pi R} \right)^2 - 2 \frac{E^{*2} \delta}{\pi^2 R} + \left(\frac{E^* \delta}{\pi a} \right)^2 \right\} = \frac{\pi^2 a^2}{E^*} \left(\frac{aE^*}{\pi R} - \frac{E^* \delta}{\pi a} \right)^2 \\ &= \frac{\pi^2 a^2}{E^*} p_B^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

ここで、接触面における付着力による表面エネルギー

$$U_S = -2\gamma\pi a^2 \quad (5.22)$$

を導入すると、弾性エネルギーと合わせて全エネルギー U_T は

$$U_T = U_E + U_S \quad (5.23)$$

式 (5.21)(5.22) を用いると

$$\left(\frac{\partial U_T}{\partial a} \right)_\delta = \frac{\pi^2 a^2}{E^*} p_B^2 - 4\gamma\pi a \quad (5.24)$$

平衡状態では $\left(\frac{\partial U_T}{\partial a} \right)_\delta = 0$ だから上式から

$$\frac{\pi^2 a^2}{E^*} p_B^2 = 4\gamma\pi a \quad (5.25)$$

よって $p_B (< 0)$ が以下のように与えられる

$$p_B = -\sqrt{\frac{4\gamma E^*}{\pi a}} \quad (5.26)$$

得られた p_B の表式および p_H の表式 (5.4) を式 (5.6) に代入すると 2 球間に働く力 F が接触面半径 a の関数として得られる：

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{2}{3} p_H + 2p_B \right) \pi a^2 \\ &= \frac{4E^*}{3R} a^3 - 2\pi a^2 \sqrt{\frac{4\gamma E^*}{\pi a}} = \frac{4E^*}{3R} a^3 - \sqrt{16\pi\gamma E^*} a^3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

またこれを a について解くと ($x = a^{\frac{3}{2}}$ と置換すると x の 2 次方程式である)

$$a^3 = \frac{3R}{4E^*} \left\{ F + 6\pi\gamma R + \sqrt{12\pi\gamma R F + (6\pi\gamma R)^2} \right\} \quad (5.28)$$

が得られる。ここで得られた関係式は実験とも調和的である (図 6)。また、 $\gamma = 0$ とすると Hertz 理論の表式と一致する。

Fig. 5.8. Variation of contact radius with load, eq. (5.49), compared with measurements on gelatine spheres in contact with perspex. Radius R : circle - 24.5 mm, cross - 79 mm, square - 255 mm.

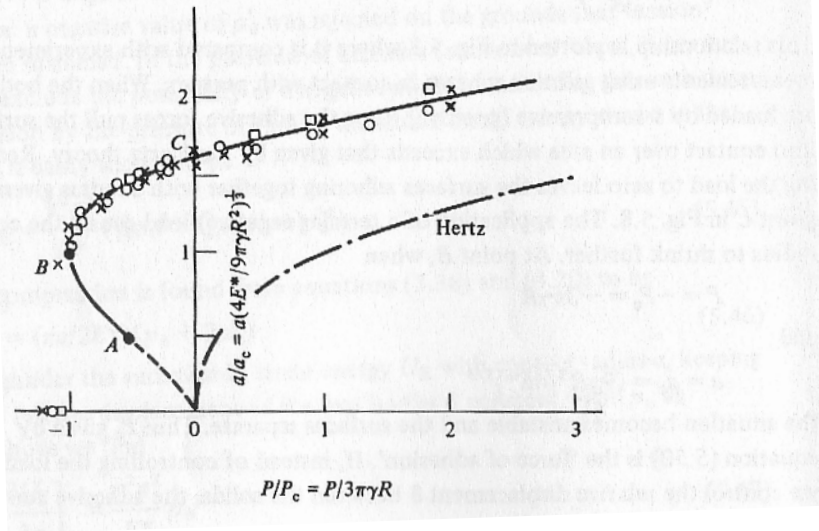


図 6: Johnson(1987) の Fig.5.8 より

$F = 0$ すなわち弾性力と付着力が外力なしでつりあっているときの接触面半径を $a = a_0$ とすると、式 (5.28) から

$$a_0 = \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.29)$$

a が減少するにしたがって F は減少していき、 $a < a_0$ では F は負になる。これは付着力によって 2 球間に引力が働いていることを意味する。やがて F が最小 (最大の引力) となり、そのときの F を $F = -F_c$, ($F_c > 0$) とする。条件 $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ から F_c の値が得られ¹、

$$F_c = 3\pi\gamma R \quad (5.30)$$

またこのときの接触面半径を $a = a_s$ とすると

$$a_s = \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} = 4^{-\frac{1}{3}} a_0 = 0.63a_0 \quad (5.31)$$

最大の引力が F_c であるから 2 球を引き剥がすために必要な外力の大きさは F_c であるといえる。これは弾性定数によらず球のサイズ R と表面エネルギー γ だけで決まる。

ところで、接触面半径 a が a_s になったところで 2 球が突然離れるというわけではない。後で示すようにこのときには 2 球の接近変位 δ は $\delta < 0$ となっており球はネックで繋がっている状態であるが、このネックが切れるのはもう少し a が小さくなってからである (図 9)。ただし、 $a < a_s$ では 2 球間に働く力は $|F| < F_c$ となるので、 F_c のままの外力で 2 球を引っ張り続けると a が a_s を超えて小さくなった段階で 2 球の分離が自発的に進む (F_c 以上の力で引っ張る必要がない)。

¹あるいは式 (5.28) において $\sqrt{\quad}$ の中が 0 以上という条件から $12\pi\gamma R F + (6\pi\gamma R)^2 \geq 0 \quad \therefore F \geq -3\pi\gamma R$

接近変位 δ は、式 (5.5) に p_B の表式 (5.26) および p_H の表式 (5.4) を代入して

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\pi a}{2E^*} (p_H + 2p_B) = \frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{4\pi\gamma a}{E^*}} = \frac{a^2}{R} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{4\pi\gamma R^2}{E^* a^3}} \right\} \\ &= \frac{a^2}{R} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{4\pi\gamma R^2}{E^*} \frac{1}{a_0^3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3} \right\}\end{aligned}\quad (5.32)$$

これに a_0 の表式 (5.29) を代入して

$$\delta = \frac{a^2}{R} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{3}{2}} \right\}\quad (5.33)$$

$a = a_0$ のときの δ を δ_0 と定義すると、上式から

$$\delta_0 = \frac{a_0^2}{3R}\quad (5.34)$$

接触面形状と圧力分布は図 7 のようになる。

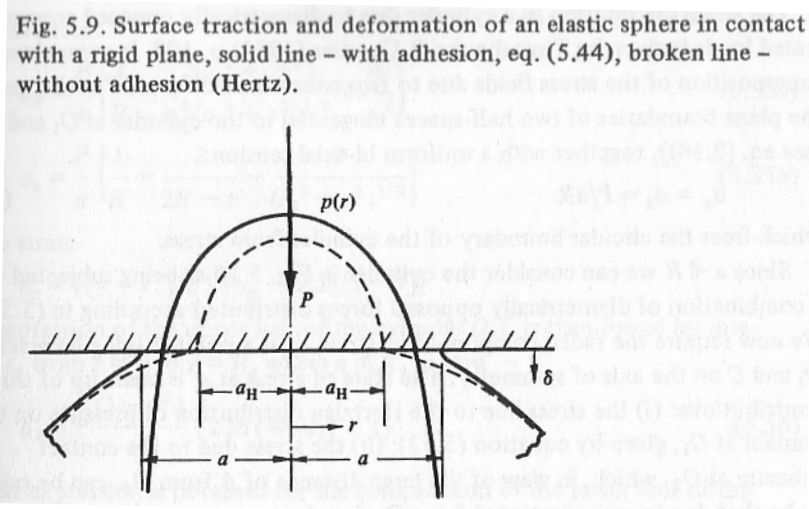


図 7: Johnson(1987) の Fig.5.9 より

5.2 規格化した関係式

ここで、 a , F , δ をそれぞれ a_0 , F_c , δ_0 で規格化して、関係式 (5.27)(5.28)(5.33) を書き改める。
まず、式 (5.28) は、 a_0 の表式 (5.29) から

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{12\pi\gamma R} \left\{ F + 6\pi\gamma R + \sqrt{12\pi\gamma R F + (6\pi\gamma R)^2} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{F}{3\pi\gamma R} + 2 + \sqrt{\frac{4F}{3\pi\gamma R} + 4} \right\} \quad (5.35)$$

従って

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{F}{F_c} + 2 + 2\sqrt{1 + \frac{F}{F_c}} \right\} \quad (5.36)$$

これを $\frac{F}{F_c}$ について解けば

$$\frac{F}{F_c} = 4 \left\{ \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (5.37)$$

また、式 (5.33) を式 (5.34) で割って

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 3 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - 2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.38)$$

$\frac{\delta}{\delta_0}$ は $\frac{a}{a_0}$ の減少とともに減少する (図 9)。 $\delta < 0$ になると 2 球の中心間距離が球半径の和より大きくなることになり、2 球間に半径 a のネックが形成されて接触していると考えられる。 $\frac{a}{a_0}$ が減少し続けると式の上では δ はある所から増加に転じるが、そのような状況を考えるのは無理がある。したがって、 δ の最小値を $-\delta_c$ ($\delta_c > 0$) とすると、 $\delta = -\delta_c$ になった時点で接触していた 2 球は突然分離することになると考えるのが自然であろう。式 (5.38) より

$$\frac{d(\delta/\delta_0)}{d(a/a_0)} = 0 \iff \frac{a}{a_0} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.39)$$

したがって、分離するときの接触面半径を a_c とすると

$$a_c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} a_0 = 0.303a_0 \quad (< a_s = 0.63a_0) \quad (5.40)$$

確かに $a = a_s$ よりさらに接触面が小さくなってから分離することが分かる。 $a = a_c$ のときの δ は式 (5.38) に a_c の値を代入して

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = -0.825 \quad (5.41)$$

よって

$$\delta_c = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \delta_0 = 0.825\delta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0^2}{R} \quad (5.42)$$

δ_c を用いて $\delta(a)$ の式 (5.33) を規格化すると

$$\frac{\delta}{\delta_c} = 6^{\frac{1}{3}} \left\{ 2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.43)$$

$a = a_c$ (or $\delta = -\delta_c$) になったとき

$$\frac{F}{F_c} = 4 \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right) \right\} = -\frac{5}{9} = -0.556 \quad (5.44)$$

規格化した a , F , δ の関係式をグラフにしたのが図 8, 9 になる。

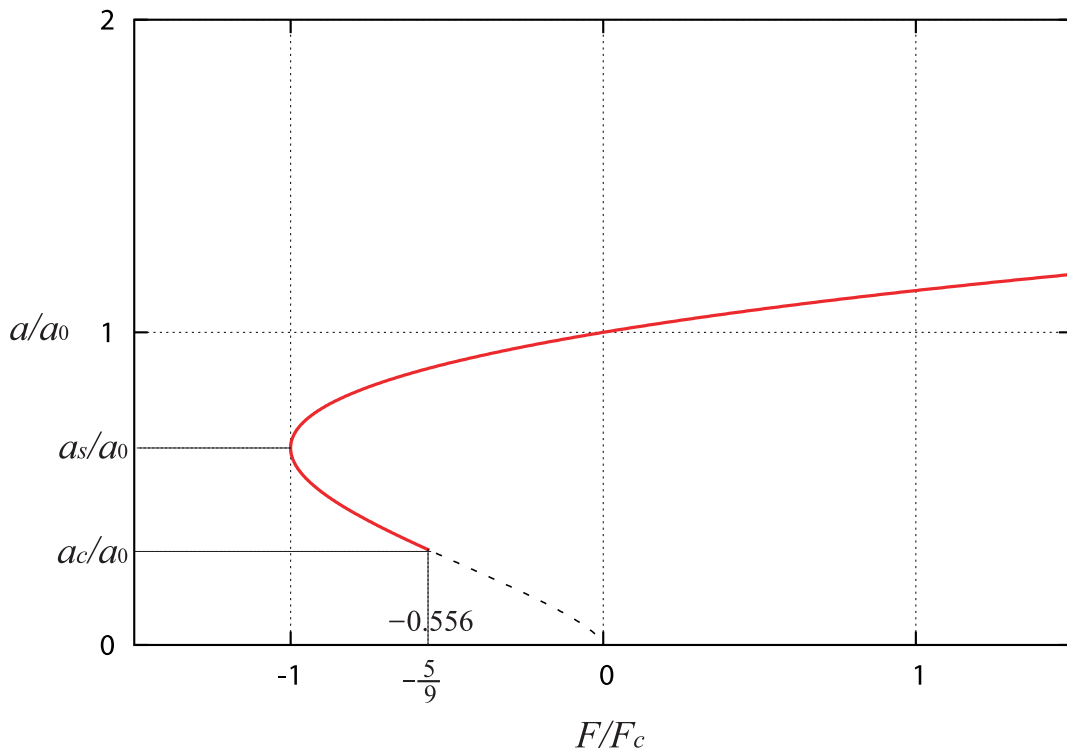


図 8: JKR 理論における、2 球間に働く力 $\frac{F}{F_c}$ と接触面半径 $\frac{a}{a_0}$ の関係

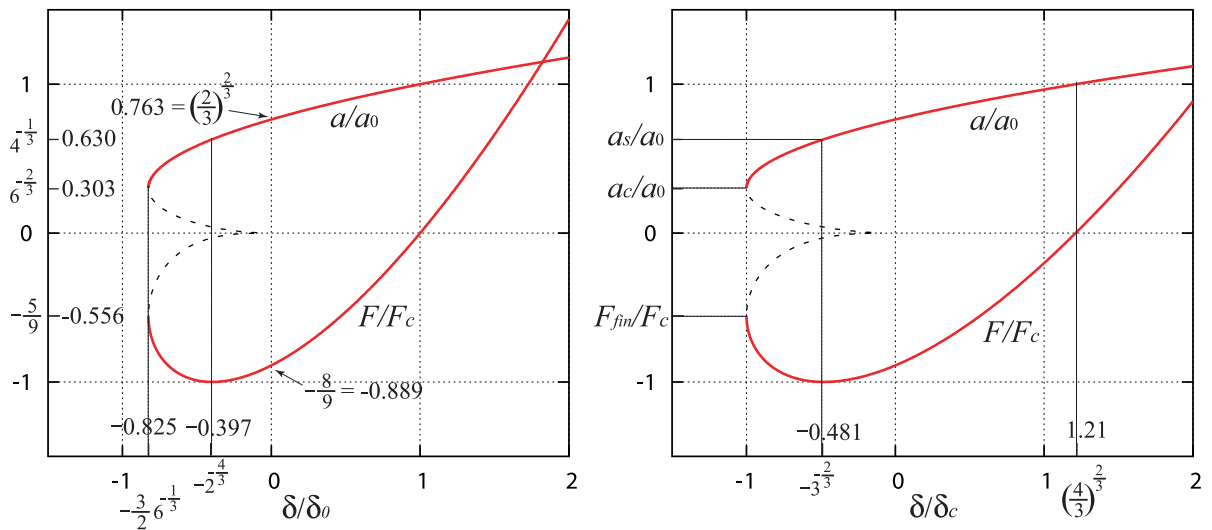


図 9: JKR 理論における、2 球間接近変位 δ に対して力 $\frac{F}{F_c}$ と接触面半径 $\frac{a}{a_0}$ をプロットしたもの。左図は $\frac{\delta}{\delta_0}$ に対して、右図は $\frac{\delta}{\delta_c}$ に対して、それぞれプロットした。

5.3 エネルギーに関する議論

付着力によるエネルギー（表面エネルギー） U_S 、弾性エネルギー U_E 、およびそれらの和である全エネルギー U_T を、それぞれ $F_c\delta_c$ で規格化して求める。

まず、 U_S は

$$\frac{U_S}{F_c\delta_c} = \frac{-2\gamma\pi a^2}{3\pi\gamma R \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0^2}{R}} = -\frac{4}{3} \times 6^{\frac{1}{3}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \quad (5.45)$$

次に U_T は

$$\begin{aligned} \frac{U_T}{F_c\delta_c} &= \frac{1}{F_c\delta_c} \int F d\delta = \int \left(\frac{F}{F_c}\right) d\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right) \\ &= \int 4 \left\{ \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \times 6^{\frac{1}{3}} \left\{ 4 \left(\frac{a}{a_0}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} d\left(\frac{a}{a_0}\right) \\ &= 2 \times 6^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{8}{5} \left(\frac{a}{a_0}\right)^5 - \frac{8}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

U_E はこれから

$$\begin{aligned} \frac{U_E}{F_c\delta_c} &= \frac{U_T}{F_c\delta_c} - \frac{U_S}{F_c\delta_c} \\ &= 2 \times 6^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{8}{5} \left(\frac{a}{a_0}\right)^5 - \frac{8}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$\frac{U_E}{F_c\delta_c}$, $\frac{U_S}{F_c\delta_c}$, $\frac{U_T}{F_c\delta_c}$ を $\frac{\delta}{\delta_c}$ に対してプロットしたものが図 10。

2 球が分離するとき ($\delta = \delta_c$)、 $U_T > 0$ となっており、その時の U_T の値は

$$\left. \frac{U_T}{F_c\delta_c} \right|_{\frac{\delta}{\delta_c}=1} = \left. \frac{U_T}{F_c\delta_c} \right|_{\frac{a}{a_0}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{45} = 0.09 \quad (5.48)$$

したがって、2 球が衝突した場合衝突前の初期運動エネルギー U_K が

$$U_K > \frac{4}{45} F_c\delta_c = 0.09 F_c\delta_c \quad (5.49)$$

の時には跳ね返ることが出来る。その際 $\frac{4}{45} F_c\delta_c$ だけエネルギーが散逸する（散逸したエネルギーは音波となってやがて減衰して熱に変わると考えられる）。ただし、接触した瞬間には瞬時（音速程度 \gg 衝突速度）に接触面（半径 $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} a_0 = 0.763a_0$ ）が形成されるとする。

反発係数 ε は

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{U_K - \frac{4}{45} F_c\delta_c}{U_K}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{4}{45} F_c\delta_c}{U_K}} \quad (5.50)$$

で与えられるので、衝突速度が大きくなると反発係数は大きくなり 1 に漸近する。

今は接触中のエネルギー散逸機構は考えていないので、衝突エネルギーが小さいために跳ね返ることが出来なかった（トラップされた）場合には、平衡点である

$$\delta = \delta_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \delta_c = 1.21\delta_c \quad (5.51)$$

の位置を中心に振動することになる。

平衡点における U_T の値は

$$U_T = -\frac{4}{5}6^{\frac{1}{3}}F_c\delta_c = -1.45F_c\delta_c \quad (5.52)$$

となる。したがって、接触している2球が完全に落ち着いている（振動していない）場合にこれを分離させるために必要なエネルギーは

$$\frac{4}{5}6^{\frac{1}{3}}F_c\delta_c + \frac{4}{45}F_c\delta_c = (1.45 + 0.09)F_c\delta_c = 1.54F_c\delta_c \quad (5.53)$$

ちなみに $F_c\delta_c$ の値は

$$F_c\delta_c = 3\pi\gamma R \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R} = 9 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \frac{\gamma^{\frac{5}{3}} R^{\frac{4}{3}}}{E^{*\frac{2}{3}}} = 24.07 \frac{\gamma^{\frac{5}{3}} R^{\frac{4}{3}}}{E^{*\frac{2}{3}}} \quad (5.54)$$

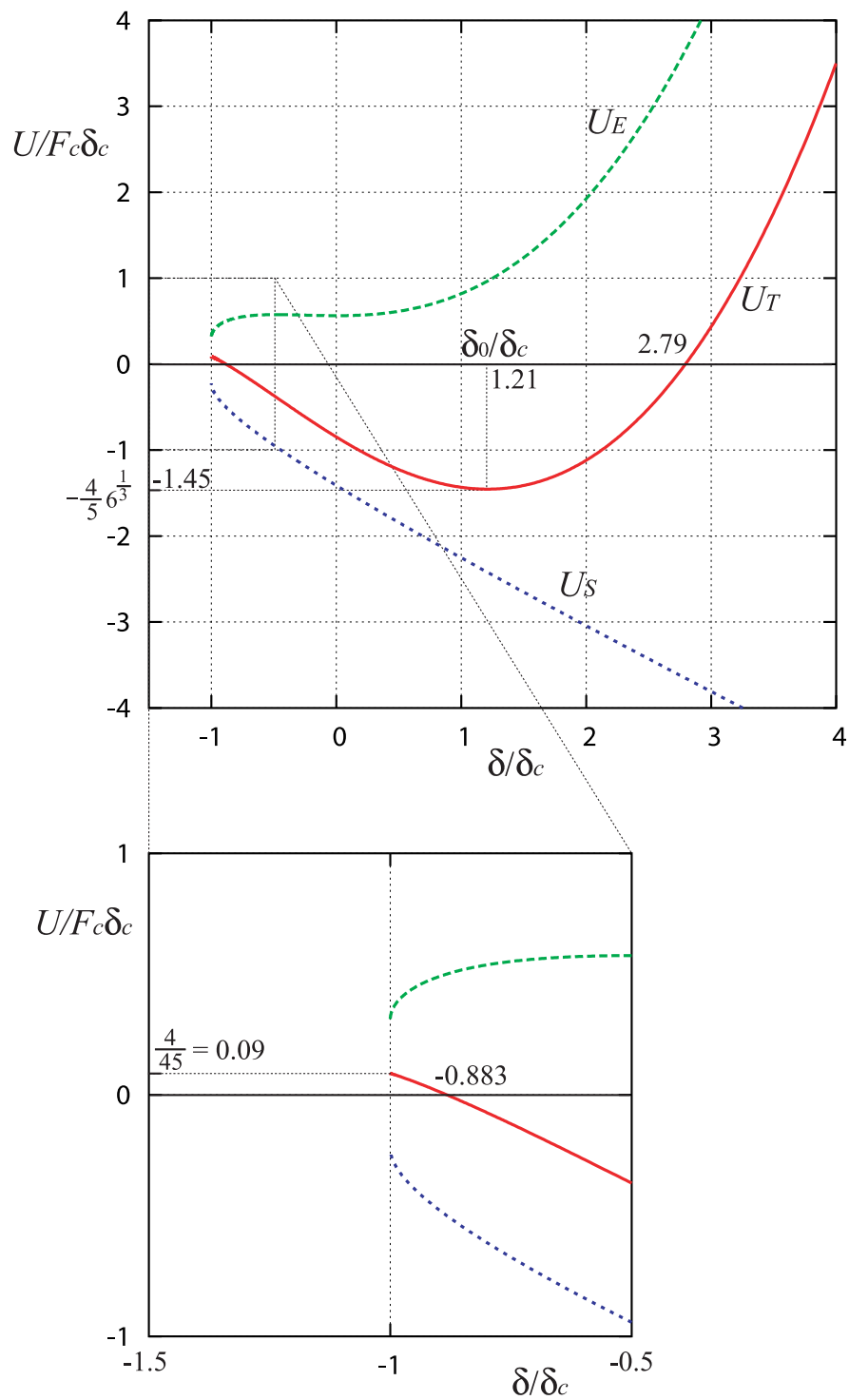


図 10: 弾性エネルギー $\frac{U_E}{F_c\delta_c}$ 、付着エネルギー $\frac{U_S}{F_c\delta_c}$ 、全エネルギー $\frac{U_T}{F_c\delta_c}$ をそれぞれ $\frac{\delta}{\delta_c}$ に対してプロットしたもの。