

## 対向集中荷重を受ける 2次元弾性円板の応力伝播の解析

佐藤 瑠介 石川 遥登 高田 智史

東京農工大学機械システム工学専攻

弾性体中の応力分布を理解することは、媒体の破壊の予測に関係するため重要である。物体内を伝播する応力は縦波 (P 波) と横波 (S 波) の 2 つの波で構成され、また、物体表面ではレイリー波やラブ波と呼ばれる波が発生することが知られている。物体内での各点の応力はこれらの波の重ね合わせとなっており、波の伝播により応力の急激な変化が発生することがある。そのため、衝撃荷重下では静荷重下とは異なる破壊が生じる場合がある。

弾性体の応力解析は有限要素法などのシミュレーションを用いて行うことが近年一般的となっている。しかし、応力の時間発展の解析解を導出することで、シミュレーション結果の信頼性の評価に役立てたり、シミュレーションからはわからない波の増幅の理論的根拠が得られると考えられる。応力伝播の動的解析はこれまでに様々な条件で行われてきた。もっとも基本的なものとしては半無限空間での解析があり、Green 関数を用いた手法 [1] や Cagniard-de Hoop 法 [2] などにより波の電波が解析的に求められる。一方、有限空間での動的問題において系が有限であることにより満たすべき境界条件が増える。その結果、境界で反射され内部に再度伝播する波などを考える必要が出てくる。有限系においても、円板や球体などいくつかの形状については動的問題が調べられている [3-6]。

本講演では、2次元の円板における応力伝播 [3] について再検討した。具体的には直径に沿って対向集中荷重を受ける円板を考え、系内部の応力伝播を動的基礎方程式解析することで明らかにした。

本研究では平面応力状態の下で、半径  $a$  の 2次元弾性体円板の円周上の対向する 2 点に時刻  $t = 0$  でステップ関数状の集中応力が作用している状況を考える。つまり円周外縁において応力が  $\sigma_{rr}|_{r=a} = -P(\theta)\Theta(t)$ ,  $\sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0$  という境界条件を満たしている状況を考える。

線形弾性論の範囲において、変位の時間発展は Navier-Cauchy 方程式で記述できる [2]。この方程式をスカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルを導入することで解いていく。このとき、両ポテンシャルは波動方程式を満たしている必要がある [2]。この波動方程式をラプラス変換により変換した式を上記の境界条件を満足するように解く。それをラプラス逆変換を行うことで、応力と変位についての時間発展の解析解を導出した。

得られた結果を図 1 に示す。得られた結果について以下に簡単にまとめる。

- 衝撃荷重が作用されたのち、荷重作用点から P 波、S 波が発生し、伝播していることがわかる。この際、時間発展が進むにしたがって波が円板の外縁で反射し、内部に再度伝播していく。このとき、P 波または S 波のどちらか片方が反射された場合でも、反射としては P 波と S 波の両方が生じる。

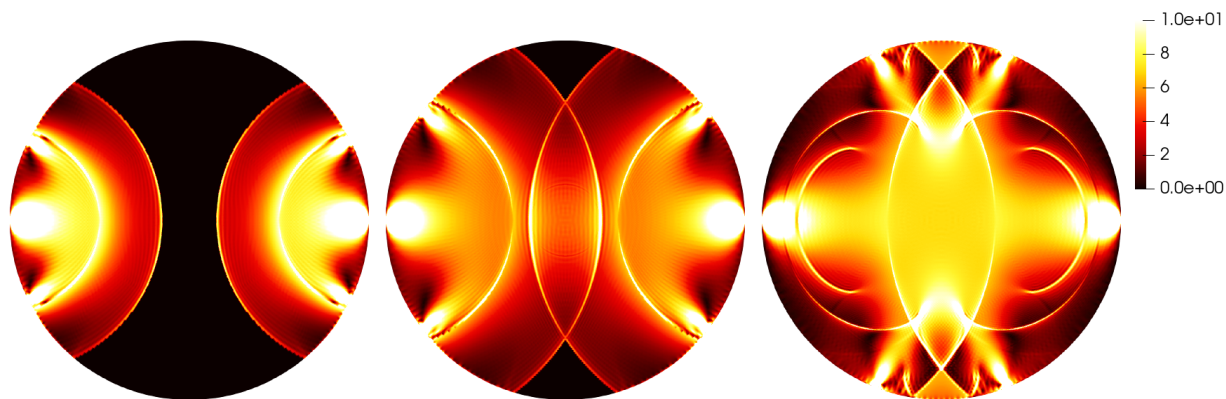


FIG. 1. ポアソン比  $\nu = 0.3$  としたときの (無次元化された) 主応力差  $\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{\sigma}_{22}$  の時間発展. それぞれ無次元時刻 (左) 0.85, (中) 1.2, (右) 2.2 における可視化である. なお, 対向衝撃荷重が図の左右に作用している状況を考えている.

- 長時間極限では, 外縁における波の反射によって多くの波が存在することになり, 結果としてよく知られた静的解 [7] に収束する.
- 表面においてはレイリー波が伝わり, その伝播速度は S 波速度のおよそ 0.9 倍である [2].

ことがわかった.

本研究においては有限サイズの系としてもっともシンプルであると考えられる 2 次元円板を考え, その内部における波の伝播について調べた. 一方, 現実の物体においては多かれ少なかれ形状の不規則性や, 内部での欠陥の存在が考えられる. これらの系への応用に向けての手法の適用などが今後の課題である.

- 
- [1] K. Aki, and P. G. Richards, *Quantitative Seismology, 2nd Ed.* (Univ. Science Books, California, 2002).
- [2] Y. C. Fung and P. Tong, *Classical and Computational Solid Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [3] T. Jingu, K. Hisada, I. Nakahara, and S. Machida, “Transient Stress in a Circular Disk under Diametrical Impact Loads” *Bull. JSME* **28**, 13 (1985).
- [4] T. Jingu and K. Nezu, “Transient stress in an elastic sphere under diametrical concentrated impact loads” *Bull. JSME* **28**, 2553 (1985).
- [5] T. Hua, R. A. Van Gorder, “Wave propagation and pattern formation in two-dimensional hexagonally-packed granular crystals under various configurations” *Granul. Matter* **21**, 3 (2019).
- [6] K. Schönert, “Breakage of spheres and circular discs” *Powder Technol.* **143–144**, 2 (2004).
- [7] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity 3rd ed.* (McGraw-Hill, New York, 1970).